

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Boolesche Algebra aller Teilmengen von \mathbb{N} :

$$BA(\mathbb{N}) = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, \mathbb{N}).$$

Welche Substrukturen von $BA(\mathbb{N})$ werden von den folgenden Teilmengen erzeugt?

- (i) Die Menge aller endlichen Teilmengen von \mathbb{N} .
- (ii) Die Menge aller unendlichen Intervalle $(n, \infty) = \{k \in \mathbb{N} \mid k > n\}$.
- (iii) Die Menge aller unendlichen Teilmengen von \mathbb{N} , deren Komplement unendlich ist.

Aufgabe 2

Wir betrachten endliche Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Ein Wort $w = w_0 \cdots w_{n-1}$ entspricht der Struktur

$$\mathfrak{w} := (\{0, \dots, n-1\}, <, P_a, P_b),$$

wobei $<$ die übliche lineare Ordnung ist, und $i \in P_j$ genau dann gilt, wenn $w_i = j$.

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils einen $FO(\{<, P_a, P_b\})$ -Satz an, der diese definiert.

- (a) $\{w \mid w_i = a \text{ für mind. ein } i\}$
- (b) $\{w \mid w_0 = a \text{ und } w_{n-1} = b\}$
- (c) $\{w \mid abba \text{ kommt als Infix vor}\}$
- (d) $\{w \mid \text{hinter jedem } a \text{ kommt noch mind. ein } b\}$