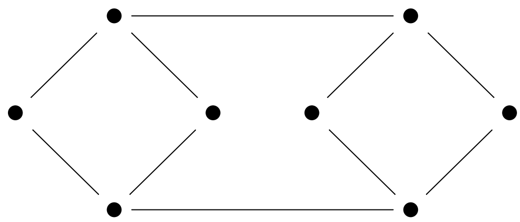
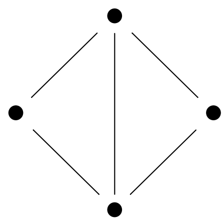
Aufgabe 1

Bestimmen Sie die kleinste Zahl m mit $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$. Geben Sie jeweils eine Gewinnstrategie für Herausforderer bzw. Duplikatorin im Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ bzw. $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an.

(a) $\mathfrak{A}$



$\mathfrak{B}$



(b) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, +, 3, 5)$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, +, 3, 7)$;

(c) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, |, 13)$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, |, 15)$.

Aufgabe 2

(a) Sei $\mathcal{L}_n := (\{0, 1, \ldots, n\}, <, \min, \max)$ die lineare Ordnung mit $n + 1$ Elementen, $\min^{\mathcal{L}_n} = 0$ und $\max^{\mathcal{L}_n} = n$. Zeigen Sie, dass für alle n, m mit $n = m$ oder $n, m \geq 2^k$ gilt $\mathcal{L}_n \equiv_k \mathcal{L}_m$.

(b) Folgern Sie, dass es keinen Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\{<\})$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{L}_n \models \varphi \Leftrightarrow n \text{ ist gerade}$$

(c) Folgern Sie aus b), dass es keinen Satz $\psi \in \mathrm{FO}(\{E\})$ gibt, so dass für jeden endlichen Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ gilt

$$\mathcal{G} \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ ist zusammenhängend}$$