Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, M. Hoelzel

SS 2016

2. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 27.04., um 12:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im L2P-Lernraum[1] der Veranstaltung unter „eTests“ zu absolvieren. Um Zugriff auf den Lernraum zu erhalten, melden Sie sich in Campus Office zur Vorlesung an. Falls Sie sich aufgrund Ihres Studiengangs (z.B. Master Informatik Auflage) nicht über das modulare Anmeldeverfahren zur Vorlesung anmelden können, schreiben Sie eine E-Mail an hoelzel@logic.rwth-aachen.de.

Aufgabe 2 — 7 Punkte

Welche der folgenden Mengen sind funktional vollständig? Begründen Sie ihre Antworten!

(a) $\{F, 0\}$ wobei

$$F(a_1, a_2, a_3) = 1 \iff |\{i \in \{1,2,3\} \ : \ a_i = 0\}| \geq 2.$$

(b) $\{\wedge, \vee, 0, 1\}$
Hinweis: Für zwei Tupel $w = (w_1, \dots, w_n), w' = (w'_1, \dots, w'_n) \in \{0,1\}^n$ schreiben wir $w \leq w'$ genau dann, wenn $w_i \leq w'_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Eine boolesche Funktion $f \in B^n$ heißt *monoton*, wenn für alle $w, w' \in \{0,1\}^n$ mit $w \leq w'$ bereits $f(w) \leq f(w')$ gilt. Zeigen Sie, dass man aus $\{\wedge, \vee, 0, 1\}$ genau die Klasse der monotonen Funktionen erzeugen kann.

Aufgabe 3 — 8 Punkte

(a) Für zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \colon \tau \to \{0,1\}$ sind die Operationen wie folgt definiert:

Schnitt: $(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)(X) := \min(\mathcal{I}_1(X), \mathcal{I}_2(X))$

Vereinigung: $(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2)(X) := \max(\mathcal{I}_1(X), \mathcal{I}_2(X))$

Komplement: $(\neg\mathcal{I}_1)(X) := 1 - \mathcal{I}_1(X)$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass Modelle von Horn-Formeln unter (i) Schnitt, (ii) Vereinigung, (iii) Komplement abgeschlossen sind.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Formeln äquivalent sind zu einer Horn-Formel. *Hinweis:* Verwenden Sie für Ihre Argumentation Aufgabenteil (a).

(i) $X \wedge \neg(\neg Y \to (\neg Y \wedge X)) \wedge ((X \wedge Y) \to (Y \vee \neg Z))$

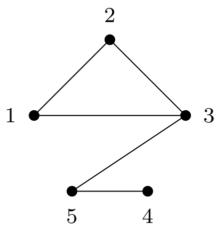
(ii) $(X \to (Y \vee Z))$

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss16/16ss-19269/Dashboard.aspx

Aufgabe 4 8 Punkte

Jeden ungerichteten Graphen mit Knoten $1, \ldots, n$ identifizieren wir mit einer aussagenlogischen Interpretation in folgender Weise: Jedem Paar $i < k$ von Knoten wird eine Variable X_{ik} zugeordnet, die genau dann den Wert 1 erhält, wenn es eine Kante zwischen i und k gibt.

(a) Geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, die ausdrückt, dass der Graph die folgende Gestalt hat:



(b) Konstruieren Sie für beliebige n Formeln φ_n, die ausdrücken, dass der Graph kreisfrei ist.

Aufgabe 5 7 Punkte

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe des Erfüllbarkeitstests für Horn-Formeln aus der Vorlesung, ob die folgende Folgerung gilt:

$$\{\, A \wedge B \to C,\ D \wedge E \to A,\ C \wedge F \to D,\ F \wedge D \to E \,\} \models B \vee \neg C \vee (F \to B)\,.$$

Geben Sie dabei für jeden Schritt des Algorithmus die Menge der markierten Variablen an.

(b) Seien Φ, Ψ Mengen von AL-Formeln, und seien φ, ψ AL-Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Wenn $\Phi \models \neg\varphi$ und $\varphi \in \Phi$, dann ist Φ unerfüllbar.

(ii) Wenn $\Phi \models \psi$ für alle $\psi \in \Psi$ und $\Psi \models \varphi$, dann auch $\Phi \models \varphi$.