

4. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 11.05., um 12:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im L2P-Lernraum¹ der Veranstaltung unter „eTests“ zu absolvieren. Um Zugriff auf den Lernraum zu erhalten, melden Sie sich in Campus Office an. Falls Sie sich aufgrund Ihres Studiengangs (z.B. Master Informatik Auflage) nicht über das modulare Anmeldeverfahren anmelden können, schreiben Sie eine E-Mail an hoelzel@logic.rwth-aachen.de.

Aufgabe 2

10 Punkte

- (a) Eine Schlussregel heißt *korrekt*, wenn für alle endlichen aussagenlogischen Formelmengen Γ, Δ und Formeln φ, ψ, \dots aus der Gültigkeit der Prämissen die Gültigkeit der Konklusion folgt.

Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln:

$$(i) \frac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\varphi \wedge \psi)}$$

$$(ii) \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\varphi \wedge \psi)}$$

- (b) Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül einen Beweis oder eine falsifizierende Interpretation für die folgende Sequenz:

$$\neg(X \rightarrow Y) \wedge (\neg Y \rightarrow (Z \vee X)) \Rightarrow \neg Y$$

- (c) Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül einen Beweis oder eine falsifizierende Interpretation, um nachzuweisen, ob die folgende Formel erfüllbar ist:

$$(\neg X \rightarrow Y) \vee \neg(Y \rightarrow X)$$

Aufgabe 3

12 Punkte

Die folgende Einschränkung des Resolutionsbegriffs heißt *N-Resolution*: Es darf nur dann eine Resolvente aus den Klauseln C_1 und C_2 gebildet werden, wenn eine der beiden Klauseln negativ ist. Dabei heißt eine Klausel *negativ*, falls sie kein positives Literal enthält.

- (a) Zeigen Sie, dass jede Klauselmenge ohne negative Klauseln erfüllbar ist.

¹<https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss16/16ss-19269/Dashboard.aspx>

(b) Zeigen Sie per N-Resolution, dass die Klauselmenge

$$K = \{\{X, \neg Y\}, \{Z, Y\}, \{\neg Z, Y\}, \{\neg Y, \neg X\}\}$$

unerfüllbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass der N-Resolutionskalkül korrekt ist: Wenn aus einer Klauselmenge K die leere Klausel \square durch N-Resolution abgeleitet werden kann, dann ist K unerfüllbar.

(d) Zeigen Sie, dass der N-Resolutionskalkül vollständig ist: Ist eine Klauselmenge K unerfüllbar ist, so lässt sich \square aus K durch N-Resolution ableiten.

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis der Vollständigkeit für das Resolutionskalkül aus der Vorlesung. Führen Sie den Beweis per Induktion über die Anzahl der in K vorkommenden Aussagenvariablen.

Aufgabe 4

8 Punkte

Sei $\tau = \{X_i : i \in \mathbb{N}\}$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass es eine Formelmenge $\Phi \subseteq \text{AL}$ gibt, welche genau dann durch eine Interpretation \mathcal{I} erfüllt wird, wenn $\mathcal{I}(Y) = 1$ für *unendlich viele* Variablen $Y \in \tau$ gilt.