Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, M. Hoelzel

SS 2016

5. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 25.05., um 12:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im L2P-Lernraum[1] der Veranstaltung unter „eTests“ zu absolvieren. Um Zugriff auf den Lernraum zu erhalten, melden Sie sich in Campus Office an. Falls Sie sich aufgrund Ihres Studiengangs (z.B. Master Informatik Auflage) nicht über das modulare Anmeldeverfahren anmelden können, schreiben Sie eine E-Mail an hoelzel@logic.rwth-aachen.de.

Aufgabe 2 5 Punkte

(a) Geben Sie alle Substrukturen von $(\mathbb{N}, \leq)$ und von $(\mathbb{N}, S)$ an, wobei $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Nachfolgerfunktion auf $\mathbb{N}$ ist, das heißt $S(n) = n + 1$.

(b) Geben Sie alle Substrukturen der Strukturen $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ sowie $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ (mit Addition modulo 6 bzw. 5) an.

Aufgabe 3 10 Punkte

Wir betrachten die Struktur $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, N^{\mathfrak{R}})$ der Signatur $\tau = \{+, \cdot, N\}$, mit der üblichen Addition und Multiplikation sowie $N^{\mathfrak{R}} = \mathbb{N}$. Drücken Sie die folgenden Sachverhalte in $\mathrm{FO}(\tau)$ aus. Achten Sie dabei auf die freien Variablen Ihrer Formeln.

(a) $x = 0$.

(b) $x = y + 1$.

(c) x ist eine irrationale Zahl.

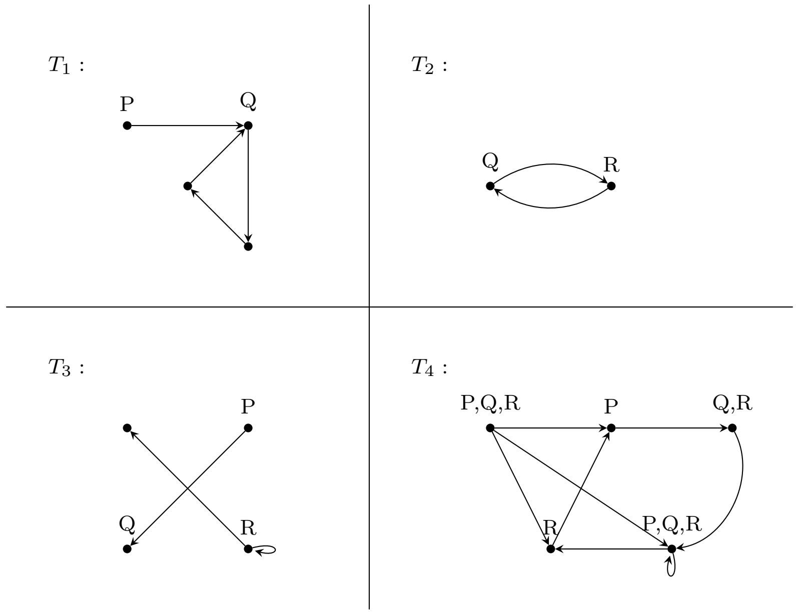
(d) x ist Nullstelle eines Polynoms p mit ganzzahligen Koeffizienten vom Grad höchstens 3, das verschieden vom Nullpolynom ist.

(e) x ist eine Primpotenz, d.h. $x = p^n$ für eine Primzahl p und ein $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 8 Punkte

Wir betrachten die folgenden Transitionssysteme $T_i = (V, E, P, Q, R), 1 \leq i \leq 4$, mit einstelligen Relationen P, Q, R, also gerichtete Graphen mit Knotenbeschriftungen:

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss16/16ss-19269/Dashboard.aspx



Beschreiben Sie die Aussagen der Sätze $\varphi_1, \cdots, \varphi_4$ in Worten und bestimmen Sie, in welchen der Transitionssysteme $T_1, \cdots, T_4$ sie gelten (kurze Begründung!).

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \exists y (Rx \rightarrow Py) \\
\varphi_2 &:= \forall x \exists y (Rx \rightarrow (Exy \wedge Qy)) \\
\varphi_3 &:= \exists x (Px \wedge \forall y (\neg Eyx)) \wedge \forall z (Rz \rightarrow Ezz) \\
\varphi_4 &:= \forall x ((Qx \wedge Px) \rightarrow \exists y \exists z \forall q ((Ry \wedge Pz) \rightarrow (Qq \vee Rq)))
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 7 Punkte

(a) Finden Sie einen Satz $\varphi_\infty \in \mathrm{FO}(\{f\})$ für ein einstelliges Funktionssymbol f, so dass φ mindestens ein unendlich großes Modell, aber kein endliches Modell hat.

(b) Sei τ ein endliche Signatur. Eine Menge Φ von $\mathrm{FO}(\tau)$-Sätzen heißt *glatt*, wenn keine Struktur mehr als einen Satz aus Φ verletzt, d.h. wenn für jede τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt $|\{\varphi \in \Phi \ : \ \mathfrak{A} \not\models \varphi\}| \leq 1$. Zeigen Sie, dass jede FO-axiomatisierbare Klasse auch ein glattes Axiomensystem hat.

Hinweis: Wegen der Endlichkeit der Signatur τ, ist Φ eine aufzählbare Menge, d.h. Φ kann als $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ geschrieben werden.