

6. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 01.06., um 12:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im L2P-Lernraum¹ der Veranstaltung unter „eTests“ zu absolvieren. Um Zugriff auf den Lernraum zu erhalten, melden Sie sich in Campus Office an. Falls Sie sich aufgrund Ihres Studiengangs (z.B. Master Informatik Auflage) nicht über das modulare Anmeldeverfahren anmelden können, schreiben Sie eine E-Mail an hoelzel@logic.rwth-aachen.de.

Aufgabe 2

8 Punkte

Formen Sie folgende Formeln zunächst in Negations-, dann in Pränex- und schließlich in Skolem-Normalform um.

(a) $\varphi := [\forall x(fxx = x) \wedge \exists x\forall y(fxfyy = fxx)] \rightarrow \exists x\forall y(x = y)$

(b) $\psi := \forall x\forall y(\neg(\exists yRyz \wedge Sxy) \rightarrow \exists z\neg(\exists uRyu \vee fzx \neq y))$.

Aufgabe 3

7 Punkte

Sei $\mathfrak{A} := (\{0, 1, 2, 3\}, \circ, 1)$ eine Struktur mit einer zweistelligen Funktion $x \circ y := x \cdot y \bmod 4$. Wir betrachten die Formel $\psi := \exists x(x \circ x = 1 \wedge \forall y(y \circ y \circ x = x \rightarrow x = y))$.

- (a) Geben Sie den Spielgraphen für das Auswertungsspiel auf \mathfrak{A} und ψ an.
- (b) Geben Sie eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler an. Was sagt dies über $\mathfrak{A} \models \psi$ aus?

Aufgabe 4

15 Punkte

Im folgenden sind $<, E, R$ binäre Relationssymbole und f ist ein einstelliges Funktionssymbol. Geben Sie für folgende Modellklassen jeweils ein (wenn möglich endliches) FO-Axiomensystem an:

- (a) $\mathcal{K}_1 = \{(A, <) : < \text{ ist eine lineare Ordnung, die weder dicht noch diskret ist}\}$
- (b) $\mathcal{K}_2 = \{(V, E) : (V, E) \text{ ist ungerichteter Graph, der beliebig große Cliques enthält}\}$
- (c) $\mathcal{K}_3 = \{(A, f) : f \text{ ist surjektiv, aber nicht injektiv}\}$
- (d) $\mathcal{K}_4 = \{(A, <) : < \text{ ist eine lineare Ordnung und es gibt } \textit{unendlich} \text{ viele } a \in A \text{ für die } \textit{nur endlich} \text{ viele } b \in A \text{ mit } b < a \text{ existieren}\}$
- (e) $\mathcal{K}_5 = \{(V, E) : (V, E) \text{ ist ein ungerichteter Graph, der 3-färbbar ist}\}$

Hinweis: Aus der Vorlesung ist bekannt: Ein ungerichteter Graph ist genau dann k -färbbar, wenn jeder endliche Untergraph k -färbbar ist.

¹<https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss16/16ss-19269/Dashboard.aspx>