Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, M. Hoelzel

SS 2016

7. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 08.06., um 12:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum[1].

Aufgabe 2

8 Punkte

Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Eine Relation $R \subseteq A^k$ (für $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$) ist *elementar* definierbar, wenn es eine Formel $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in \mathrm{FO}(\tau)$ gibt, so dass für alle $a_1, \dots, a_k \in A$

$$(a_1, \dots, a_k) \in R \iff \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k).$$

Welche der folgenden Relationen sind in den angegeben Strukturen elementar definierbar? Geben Sie entweder eine FO-Formel an, welche die gegebene Relation definiert, oder beweisen Sie, dass es eine solche FO-Formel nicht gibt.

(a) $\{2\}$ in $(\mathbb{N}, +)$

(b) $<$ in $(\mathbb{N}, \cdot)$

(c) $\mathbb{Q}$ in $(\mathbb{R}, +)$

(d) $\{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \ : \ p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ sind paarweise verschiedene Primzahlen$, n \geq 1\}$ in $(\mathbb{N}, \cdot)$

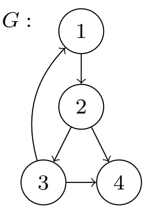
(e) $\left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{a+b}{2} = c\right\}$ in $(\mathbb{R}, \cdot)$

Aufgabe 3

6 Punkte

(a) Geben Sie einen Satz $\varphi_G \in \mathrm{FO}(\{E\})$ an, der den folgenden gerichteten Graphen G bis auf Isomorphie definiert, d.h. für alle Graphen H soll $H \models \varphi_G \iff G \cong H$ gelten.

G :



(b) Kann man jede endliche τ-Struktur bis auf Isomorphie definieren? Oder geht dies nur unter bestimmten Voraussetzungen?

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss16/16ss-19269/Dashboard.aspx

Aufgabe 4 7 Punkte

Sei τ eine endliche Signatur und $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Für $a, b \in A$ schreiben wir $a \sim b$, falls es einen Automorphismus π von $\mathfrak{A}$ mit $\pi(a) = b$ gibt.

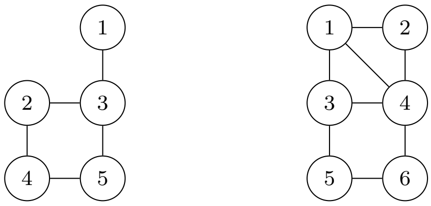
(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Sei nun $\mathfrak{A}$ eine endliche Struktur und r bezeichne die Anzahl der $\sim$-Äquivalenzklassen. Beweisen Sie, dass

$$|\{X \subseteq A \ : \ X \text{ ist elementar definierbar in } \mathfrak{A}\}| = 2^r.$$

Aufgabe 5 9 Punkte

(a) Welche Automorphismen haben die folgenden (ungerichteten) Graphen?



G_1 G_2

(b) Wie viele elementar definierbare Knoten*mengen* gibt es in G_1 bzw. in G_2?

(c) Zeigen Sie, dass $G_1 \not\equiv_3 G_2$ gilt.

(d) Sei $\mathcal{K}_4$ die Klasse aller ungerichteten Graphen[2] mit genau 4 Knoten. Für jeden solchen Graphen $G \in \mathcal{K}_4$ sei m_G die Anzahl der elementar definierbaren Knoten*mengen* in G. Welchen Wert hat $\max\{m_G \ : \ G \in \mathcal{K}_4\}$?

Begründen Sie ihre Antworten!

[2]Ein Graph ist ungerichtet, wenn seine Kantenrelation symmetrisch ist und er keine Selbstkanten enthält.