Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, M. Hoelzel

SS 2016

8. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 15.06., um 12:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum[1].

Aufgabe 2 7 Punkte

Was ist jeweils die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ für die $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$ gilt? Geben Sie einen trennenden Satz φ vom Quantorenrang m und sowie Gewinnstrategien für den Herausforderer bzw. die Duplikatorin im Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ bzw. $\mathcal{G}_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an.

(a) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathfrak{A}}, P_1^{\mathfrak{A}} := \{7\}, P_2^{\mathfrak{A}} := \{11\})$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, +^{\mathfrak{B}}, P_1^{\mathfrak{B}} := \{7\}, P_2^{\mathfrak{B}} := \{15\})$ wobei $+^{\mathfrak{A}}$ und $+^{\mathfrak{B}}$ jeweils die Addition als 3-stellige *Relation* beschreiben.

(b) $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, +^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{Q}, +^{\mathfrak{B}})$ wobei $+^{\mathfrak{A}}$ und $+^{\mathfrak{B}}$ jeweils die Addition als 3-stellige *Relation* beschreiben.

Aufgabe 3 7 Punkte

Sei τ eine endliche, relationale Signatur und $\mathcal{K}$ eine Klasse von τ-Strukturen.

(a) Zeigen Sie: Wenn es eine τ-Struktur $\mathfrak{B} \notin \mathcal{K}$ gibt und für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$ existiert für das die Duplikatorin das Spiel $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B})$ gewinnt, dann ist $\mathcal{K}$ nicht FO-axiomatisierbar, d.h. es gibt keine Formel*menge* $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ mit $\mathrm{Mod}(\Phi) = \mathcal{K}$.

(b) Benutzen Sie die Aussage aus (a), um zu zeigen, dass

$$\mathcal{K}' := \{(A, R) \ : \ \text{für jedes } a \in A \text{ gilt } (a, b) \in R \text{ nur für höchstens } \textit{endlich} \text{ viele } b \in A \text{ gilt}\}$$

nicht FO-axiomatisierbar ist.

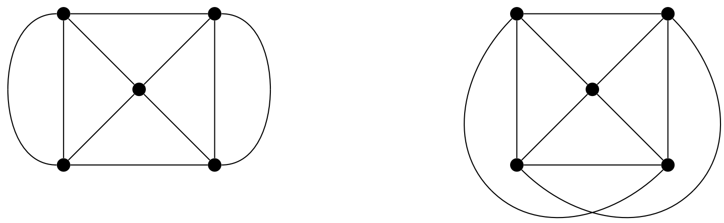
Aufgabe 4 8 Punkte

Ein Graph G heißt *planar*, wenn er in der 2-dimensionalen Ebene so gezeichnet werden kann, dass keine zwei verschiedenen Kanten sich überschneiden. Beweisen Sie, dass es *keinen* Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\{E\})$ gibt mit

$$G \models \varphi \iff G \text{ ist ein planarer (ungerichteter) Graph.}$$

Hinweis: Betrachten Sie den folgenden planaren Multi-Graphen[2] G und den nicht-planaren Graphen H:

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss16/16ss-19269/Dashboard.aspx
[2] Ein Multi-Graph darf mehr als nur eine Kante zwischen zwei Knoten haben.



G H

Konstruieren Sie nun zwei Familien $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von planaren bzw. nicht-planaren ungerichteten Graphen (keine Multi-Graphen!) und verwenden Sie dann die Methode von Ehrenfeucht und Fraïssé. Es genügt, die Gewinnstrategien der Duplikatorin in den entsprechenden Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen nur zu skizzieren.

Aufgabe 5 8 Punkte

Sei τ eine endliche Signatur und $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Für $a, b \in A$ schreiben wir $a \sim b$, falls es einen Automorphismus π von $\mathfrak{A}$ mit $\pi(a) = b$ gibt. In der letzten Übung ist für endliche Strukturen $\mathfrak{A}$ gezeigt worden, dass

$$|\{X \subseteq A \ : \ X \text{ ist elementar definierbar in } \mathfrak{A}\}| = 2^{r(\mathfrak{A})} \tag{1}$$

gilt, wobei $r(\mathfrak{A}) := |A/\sim|$ die Anzahl der $\sim$-Äquivalenzklassen ist.

Gilt dieser Zusammenhang (1) ebenfalls für alle unendlich großen Strukturen $\mathfrak{A}$, bei denen $r(\mathfrak{A})$ endlich (d.h. $r(\mathfrak{A}) \in \mathbb{N}$) ist? Begründen Sie ihre Antwort!