

9. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 22.06., um 12:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum¹.

Aufgabe 2 6 Punkte

Zeigen Sie, dass die Schlussregel $(\Rightarrow \forall)$ des Sequenzenkalküls korrekt ist. Beweisen Sie außerdem, dass die Regeln $(\exists \Rightarrow)$, $(\Rightarrow \forall)$ ohne die Zusatzbedingung, dass c in den anderen Formeln nicht auftritt, nicht korrekt wäre.

Aufgabe 3 7 Punkte

Formalisieren Sie in der Prädikatenlogik die Aussage „Der Dorfbarbier x rasiert genau die Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren.“ und beweisen Sie anhand des Sequenzenkalküls, dass es einen solchen Barbier nicht geben kann. (*Hinweis:* Sie können annehmen, dass das Universum ein Dorf ist.)

Aufgabe 4 8 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln:

(a)

$$\frac{\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Delta, \varphi(c)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x(\psi(x) \rightarrow \varphi(x))}$$

wobei c nicht in Γ, Δ auftreten darf.

(b)

$$\frac{\Gamma, \exists x(\psi(x) \rightarrow \exists y(\varphi(y) \wedge y \neq x)) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi(c) \Rightarrow \Delta, \psi(c)}$$

Aufgabe 5 9 Punkte

Sei $\tau = \{c_0, c_1, f, R\}$ wobei c_0, c_1 Konstantensymbole, f ein einstelliges Funktionssymbol und R ein einstelliges Relationssymbol sind. Sei ferner $T := \{f^3 c_0 = f^3 c_1, f^6 c_0 = f c_1\} \cup \{Rc_0, Rf^3 c_1\}$, Σ die kleinste Menge, die T enthält und unter Substitution abgeschlossen ist, sowie \sim die von Σ induzierte Kongruenzrelation auf der Herbrandstruktur $\mathfrak{H}(\Sigma)$.

(a) Beschreiben Sie Σ .

(b) Beschreiben Sie $\mathfrak{H}(\Sigma)$ und die kanonische Struktur $\mathfrak{A}(\Sigma) := \mathfrak{H}(\Sigma)/\sim$.

(c) Ist $\mathfrak{A}(\Sigma)$ ein Modell von T ?

(d) Sei $T' := T \cup \{\exists x(Rx \wedge Rffx)\}$. (Dann ist Σ auch der Abschluss von T' unter Substitution.)
Zeigen Sie: T' ist erfüllbar, aber $\mathfrak{A}(\Sigma) \not\models T'$.

¹<https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss16/16ss-19269/Dashboard.aspx>