Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, M. Hoelzel

SS 2016

10. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 29.06., um 12:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgaben, die mit einem Stern markiert sind, bringen Zusatzpunkte.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum[1].

Aufgabe 2 — 10 Punkte

Welche der folgenden Theorien sind vollständig?

(a) Die Theorie der diskreten linearen Ordnungen ohne Endpunkte.

(b) Die Theorie der linearen Ordnungen ohne Endpunkte, bei der jedes Element einen direkten Nachfolger besitzt.

(c) Die Theorie der Äquivalenzrelationen mit unendlich vielen Äquivalenzklassen, aber ohne endliche Äquivalenzklassen.

Aufgabe 3* — 10* Punkte

Sei $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ eine lineare Ordnung. Wir schreiben $a \sim_{\mathfrak{A}} b$ für zwei $a, b \in A$, wenn

$$\{c \in A \ : \ (a < c \text{ und } c < b) \text{ oder } (b < c \text{ und } c < a)\}$$

endlich ist.

(a) Wir definieren $Q(\mathfrak{A}) := \left(A_{/\sim_{\mathfrak{A}}}, <^{Q(\mathfrak{A})}\right)$ wobei $A_{/\sim_{\mathfrak{A}}}$ die Menge der $\sim_{\mathfrak{A}}$-Äquivalenzklassen ist und $[a]_{\sim_{\mathfrak{A}}} <^{Q(\mathfrak{A})} [b]_{\sim_{\mathfrak{A}}}$ genau dann gelte, wenn $a' <^{\mathfrak{A}} b'$ für alle $a' \in [a]_{\sim_{\mathfrak{A}}}$ und alle $b' \in [b]_{\sim_{\mathfrak{A}}}$.

Zeigen Sie, dass $Q(\mathfrak{A})$ wieder eine lineare Ordnung ist (für jede lineare Ordnung $\mathfrak{A}$).

(b) Geben Sie zwei nicht-isomorphe Ordnungen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ an, so dass $Q(\mathfrak{A}_i)$ isomorph zu $\mathfrak{A}_i$ ist (für beide i).

(c) Wir nennen eine lineare Ordnung $\mathfrak{A}$ trivial, wenn $Q(\mathfrak{A})$ nur aus einem Element besteht. Konstruieren Sie nun eine lineare Ordnung $\mathfrak{A}$, so dass $Q(Q(\mathfrak{A}))$ eine nicht-triviale Ordnung ist, aber $Q(Q(Q(\mathfrak{A})))$ eine triviale Ordnung ist.

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss16/16ss-19269/Dashboard.aspx

Aufgabe 4 10 Punkte

Sei τ eine Signatur. Eine Theorie T heißt endlich axiomatisierbar, wenn

$$T = \mathrm{Th}(\Phi) \coloneqq \{\varphi \in \mathrm{FO}(\tau) \;:\; \Phi \models \varphi\}$$

für eine *endliche* Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ gilt. Eine Theorie T' heißt vollständige Erweiterung von T, wenn $T' \supseteq T$ und T' vollständig ist.

(a) Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine erfüllbare Theorie. Zeigen Sie, dass T genau dann vollständig ist, wenn $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ für eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt.

(b) Sei nun T eine endlich axiomatisierbare Theorie mit endlich vielen vollständigen Erweiterungen. Beweisen Sie, dass jede vollständige Erweiterung von T *endlich* axiomatisierbar ist.

Hinweis: Benutzen Sie (a), um für die vollständigen Erweiterungen Modelle zu erhalten.

Aufgabe 5* 10* Punkte

Sei τ eine abzählbare Signatur und sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Beweisen Sie, dass $\mathfrak{A}$ elementar äquivalent zu einer *abzählbaren* Substruktur von $\mathfrak{A}$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Aussage aus den Tutorien, dass $\mathfrak{A}$ mit abzählbar vielen Konstantensymbolen zu einer Struktur $\mathfrak{A}'$ expandiert werden kann, so dass $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}')$ eine Hintikka-Menge ist.