Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, M. Hoelzel

SS 2016

11. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 06.07., um 12:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgaben, die mit einem Stern markiert sind, bringen Zusatzpunkte.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum[1].

Aufgabe 2 — 10 Punkte

Sei τ eine Signatur und $\mathcal{K}$ eine Klasse von τ-Strukturen. Die Komplementklasse $\overline{\mathcal{K}}$ von $\mathcal{K}$ ist definiert durch $\overline{\mathcal{K}} := \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ ist } \tau\text{-Struktur und } \mathfrak{A} \notin \mathcal{K}\}$. Zeigen Sie: Wenn sowohl $\mathcal{K}$ als auch $\overline{\mathcal{K}}$ axiomatisierbar sind, dann ist sowohl $\mathcal{K}$ als auch $\overline{\mathcal{K}}$ bereits *endlich* axiomatisierbar.

Aufgabe 3 — 20 Punkte

Geben Sie für die folgenden Klassen von Strukturen ein (wenn möglich endliches) Axiomensystem an oder widerlegen Sie jeweils die Existenz solcher (endlicher) Axiomensysteme.

(a) Die Klasse der zu $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot)$ isomorphen Strukturen.

(b) Die Klasse der ungerichteten Graphen ohne unendlich große Cliquen.

(c) Die Klasse $\{(A, +) : (A, +) \text{ ist isomorph zu } (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

(d) Die Klasse der zusammenhängenden, ungerichteten Graphen.

(e) Die Klasse $\{(A, +) : (A, +) \text{ ist isomorph zu } (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ mit } n \leq 713\}$.

(f) Die Klasse der partiellen Ordnungen, die keine linearen Ordnungen sind.

(g) Die Klasse der Wohlordnungen[2] $(A, <)$.

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss16/16ss-19269/Dashboard.aspx

[2] Eine Wohlordnungen ist eine lineare Ordnung $(A, <)$ bei der es keine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus A mit $a_i > a_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gibt.

Aufgabe 4* 10* Punkte

Für eine Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ und zwei τ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ schreiben wir $\mathfrak{A} \equiv_\Phi \mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{A} \models \varphi \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$ gilt. Eine Satzmenge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ heißt *stark*, wenn für alle τ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \equiv_\Psi \mathfrak{B}$ bereits $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ gilt.

Eine boolesche Kombination von Sätzen aus Ψ ist ein FO-Satz, der nur mit $\wedge, \vee, \neg, (,)$ und Sätzen aus Ψ konstruiert wird. Zum Beispiel ist $(\psi_1 \vee \neg(\neg\psi_2 \wedge \psi_3)) \wedge \psi_3$ eine boolesche Kombination von Sätzen aus $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots\}$.

(a) Geben Sie zwei (verschiedene) Beispiele für starke Satzmengen an.

(b) Sei nun $\Psi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine starke Satzmenge. Beweisen Sie, dass jeder Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ äquivalent zu einer booleschen Kombination von Sätzen aus Ψ ist.

Hinweis: Betrachten Sie $\Psi' := \Psi \cup \{\neg\psi \ : \ \psi \in \Psi\}$. Zeigen Sie nun, dass für jedes Paar $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ von Strukturen mit $\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B}$ ein Satz $\psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} \in \Psi'$ mit $\mathfrak{A} \models \psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{B} \not\models \psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ existiert. Betrachten Sie für jedes $\mathfrak{A} \models \varphi$ die Satzmenge

$$\Psi_{\mathfrak{A}} := \{\psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} \ : \ \mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}(\neg\varphi)\}\,.$$

Machen Sie außerdem Gebrauch vom Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik!