Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, M. Hoelzel

SS 2016

12. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 13.07., um 12:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum[1].

Aufgabe 2 10 Punkte

Zeigen Sie, dass das Erfüllbarkeitsproblem entscheidbar ist für Formeln der Form

$$\exists x_1 \ldots \exists x_r \forall y_1 \ldots \forall y_s \vartheta$$

wobei $r, s \in \mathbb{N}$, $r > 0$ und $\vartheta(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$ quantorenfrei sowie *relational* sein soll.

Hinweis: Zeigen Sie, dass jede erfüllbare Formel dieser Gestalt ein Modell mit höchstens r Elementen hat.

Aufgabe 3 10 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir nur Transitionssysteme der Form $\mathcal{K} = (V, E, P, Q)$, wobei E die (einzige) Kantenbeziehung ist und $P, Q \subseteq V$ die atomaren Eigenschaften sind. Ist $v \in V$, so nennen wir $w \in V$ einen P-Nachfolger (bzw. Q-Nachfolger) von v, wenn $(v, w) \in E$ und $w \in P$ (bzw. $w \in Q$) gilt.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Eigenschaften von Transitionssystemen mit ausgewählten Knoten v in der Modallogik definierbar sind.

(a) Jeder P-Nachfolger von v besitzt keinen Q-Nachfolger.

(b) v hat einen Q-Nachfolger mit mindestens 2 verschiedenen P-Nachfolgern.

(c) Der Knoten v besitzt eine Selbstkante.

(d) Von v geht kein Pfad der Länge 5 aber ein Pfad der Länge 4 aus.

Hinweis: Auf einem Pfad dürfen Wiederholungen von Knoten auftreten.

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss16/16ss-19269/Dashboard.aspx

Aufgabe 4 10 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir nur *Transitionssysteme* der Form $\mathcal{K} = (V, E, P)$ und nur Formeln der Modallogik, mit nur einer einzigen Aktion und nur einer einzigen atomaren Eigenschaft P.

Für gerichtete Graphen $G = (V, E)$ und Formeln φ der Modallogik definieren die Beziehung $G \Vdash \varphi$ durch

$$G \Vdash \varphi :\Longleftrightarrow \text{ für alle } P \subseteq V \text{ und alle } v \in V \text{ gilt } (V, E, P), v \models \varphi.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(V, E) \Vdash \Diamond\Diamond P \rightarrow \Diamond P$ genau dann gilt, wenn E transitiv ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass modallogische Operatoren ($\Box, \Diamond$) stärker binden als boolesche Junktoren, d.h. es gilt $\Diamond\Diamond P \rightarrow \Diamond P \;=\; (\Diamond\Diamond P) \rightarrow \Diamond P$.

(b) Zeigen Sie, dass $(V, E) \Vdash \Box P \rightarrow P$ genau dann gilt, wenn E reflexiv ist.

(c) Konstruieren Sie eine Formel φ der Modallogik, so dass $(V, E) \Vdash \varphi$ genau dann gilt, wenn E symmetrisch ist.