Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2014

Probeklausur Mathematische Logik

Aufgabe 1

(a) (i) Sei $\tau = \{R\}$ für ein zweistelliges Relationssymbol R. Geben Sie eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ an, sodass für jede τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt, dass $\mathfrak{A} \models \varphi$.

(ii) Geben Sie eine Formel φ an, die die Klasse der 2-regulären ungerichteten Graphen axiomatisiert.

(iii) Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \circ)$, wobei $\circ^{\mathfrak{A}}$ die übliche Addition ist, und sei $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}, \circ)$, wobei $\circ^{\mathfrak{B}}$ die übliche Multiplikation ist. Geben Sie einen Satz φ an, sodass $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi$.

(iv) Formulieren Sie den aufsteigenden Satz von Löwenheim-Skolem.

(v) Definieren Sie die semantische Folgerungsbeziehung für die Aussagenlogik.

(b) Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen zutreffen und geben Sie eine *kurze* Begründung an (etwa, indem Sie ein Gegenbeispiel konstruieren, oder bekannte Ergebnisse aus der Vorlesung/Übung für Ihre Argumentation verwenden).

Achtung: Fehlt eine Begründung, so wird Ihre Lösung mit 0 Punkten bewertet.

(i) Es gibt eine Boolesche Funktion $f\colon \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ mit $f(0,0) = 0$, so dass $\{f\}$ funktional vollständig ist.

(ii) Sei φ eine Horn-Formel und $\psi = (X \to \varphi)$. Dann ist ψ äquivalent zu einer Horn-Formel.

(iii) Seien $\Psi_1, \Psi_2 \subseteq \mathrm{AL}$ zwei Mengen von AL-Formeln, so dass jeweils jede endliche Teilmenge $\Phi_1 \subseteq \Psi_1$ und jede endliche Teilmenge $\Phi_2 \subseteq \Psi_2$ erfüllbar ist. Dann ist $\Psi_1 \cup \Psi_2$ erfüllbar.

(iv) Sei $\Delta \subseteq \mathrm{AL}$ eine Menge von AL-Formeln, so dass $\emptyset \Rightarrow \Delta$ eine gültige Sequenz ist. Dann gibt es eine Formel $\delta \in \Delta$, die eine Tautologie ist.

(v) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ eine endliche Menge von AL-Formeln. Dann ist für jedes $\varphi \in \Phi$ die Sequenz $\Phi \Rightarrow \varphi$ im Sequenzenkalkül ableitbar.

(vi) Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen. Wenn für alle Sätze $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ gilt, dass wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$, dann auch $\mathfrak{B} \models \varphi$, so gilt bereits $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

(vii) Für jede τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gibt es eine τ-Struktur $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B}$ aber $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

(viii) Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen, wobei τ endlich und relational ist. Wenn der Herausforderer das Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt, dann gibt es keinen Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

(ix) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine endliche Menge von $\mathrm{FO}(\tau)$-Sätzen. Dann gibt es einen Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$, so dass $\mathrm{Mod}(\Phi) = \mathrm{Mod}(\varphi)$.

(x) Der Satz $\varphi = \exists x \exists y (x + y \neq y + x) \in \mathrm{FO}(\{+\})$ ist erfüllbar.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der Resolutionsmethode, dass die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(F \to C) \land (C \to A) \land ((A \land C) \to (B \land E)) \land (C \lor F) \land ((E \land \neg B) \to \neg D) \land \neg(\neg D \lor E).$$

(b) Zeigen oder widerlegen Sie für die folgenden Formeln jeweils, dass sie zu einer Horn-Formel äquivalent sind.

(i) $(X \lor \neg Y \lor \neg Z) \leftrightarrow \neg X$

(ii) $A \lor (B \land \neg C) \lor D$

(c) Wenden Sie den Markierungsalgorithmus für Horn-Formeln aus der Vorlesung an, um die Gültigkeit der folgenden Folgerungsbeziehung nachzuweisen. Geben Sie dabei als Zwischenschritte die Mengen der jeweils markierten Variablen an.

$$\{A \land F \to D,\ E \land F \to B,\ C \land A \to E,\ A \land E \to F\} \models \neg A \lor (C \to D)$$

Aufgabe 3

(a) Erläutern Sie den Unterschied zwischen der semantischen Folgerungsbeziehung und der Ableitbarkeitsbeziehung.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie semantisch (also durch Argumentation über die Gültigkeit von Sequenzen und *nicht* per Ableitung im Sequenzenkalkül) die Korrektheit der folgenden Schlussregeln der Aussagenlogik.

(i) $$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta}$$

(ii) $$\frac{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

(c) Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül einen Beweis oder eine falsifizierende Interpretation für die folgende Sequenz.

$$(\neg X \vee Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \Rightarrow X \rightarrow Z$$

Aufgabe 4

Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, <)$, wobei

- $(i, k) + (j, \ell) = (\max\{i, j\}, k + \ell)$ und
- $(i, k) < (j, \ell)$ genau dann, wenn $i < j$ oder $(i = j$ und $k < \ell)$.

(a) Geben Sie eine $\mathrm{FO}(\{+, <\})$-Formel an, welche die einstellige Relation

$$N = \{(i, k) : k < 0, i \in \mathbb{Z}\}$$

in der Struktur $\mathfrak{A}$ definiert.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Relationen in $\mathfrak{A}$ elementar definierbar sind:

(i) die einstellige Relation $M = \{(0, k) : k \in \mathbb{Z}\}$,

(ii) die binäre Relation $R = \{((i, k), (j, k)) : i, j, k \in \mathbb{Z}\}$.

(c) Wir betrachten die folgenden Strukturen über der Signatur $\tau = \{+, P\}$:

$$\mathfrak{A}_1 = (\mathbb{Z}, +, 2\mathbb{Z}),$$
$$\mathfrak{A}_2 = (\mathbb{Z}, +, \{z \in \mathbb{Z} : z \text{ ungerade}\}),$$
$$\mathfrak{A}_3 = (2\mathbb{Z}, +, 4\mathbb{Z}).$$

Beweisen oder widerlegen Sie für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i < j$ jeweils, dass es einen Satz $\varphi_{ij} \in \mathrm{FO}(\tau)$ gibt, mit $\mathfrak{A}_i \models \varphi_{ij}$ und $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_{ij}$.

Aufgabe 5

Wir betrachten Strukturen $\mathfrak{A} = (V, E, f)$, wobei $E \subseteq V \times V$ eine zweistellige Relation ist und $f\colon V \rightarrow V$ eine einstellige Funktion. Zeigen oder widerlegen Sie für die folgenden Klassen solcher Strukturen jeweils, dass sie (endlich) $\mathrm{FO}(\{E, f\})$-axiomatisierbar sind.

Hinweis: Im Folgenden bezeichnen wir mit $\mathrm{id}_V\colon V \rightarrow V$ die Identitätsabbildung auf V, d.h. $\mathrm{id}_V(v) = v$ für alle $v \in V$.

(a) $\mathcal{K}_a = \{\mathfrak{A} = (V, E, f) : (V, E)$ ist ein vollständiger, ungerichteter Graph und $f^3 = \mathrm{id}_V\}$

(b) $\mathcal{K}_b = \{\mathfrak{A} = (V, E, f) : (V, E)$ ist ein (gerichteter) Graph, so dass gilt:
Wenn ein $v \in V$ existiert mit $(v, f(v)) \in E$, dann enthält (V, E) keine Kreise$\}$

(c) $\mathcal{K}_c = \{\mathfrak{A} = (V, E, f) :$ es gibt ein $n \geq 1$ mit $f^n = \mathrm{id}_V\}$