Aufgabe 1

Sind die folgenden Formeln Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar?

(a) $\neg(X \to (Y \to X))$;

(b) $(Y \to X) \land (X \to \neg Y)$;

(c) $(Y \to X) \lor (X \to \neg Y)$.

Aufgabe 2

Im Hotel MaLo kann man die Lampen nicht manuell ein- oder ausschalten. Stattdessen denkt sich der Hotelbesitzer auf willkürliche Weise jeden Tag neue seltsame Regeln aus mit denen die Lampen auf den 4 Stockwerken zentral gesteuert werden. Die heutigen Regeln sind:

(1) Im ersten Stockwerk leuchtet das Licht, wenn es in allen anderen Stockwerken auch leuchtet. Andernfalls ist es im ersten Stock dunkel.

(2) Es leuchtet im zweiten Geschoss, wenn die Lampen auf mindestens zwei anderen Stockwerken ausgeschaltet sind.

(3) Das dritte Geschoss ist genau dann erhellt, wenn in einer ungeraden Anzahl an Stockwerken die Lampen leuchten.

(4) Wenn in genau einem Stockwerk unterhalb des vierten Flures das Licht brennt, dann leuchtet es auch im vierten Stockwerk.

Formalisieren Sie diese Regeln in der Aussagenlogik. Auf welchen Stockwerken sollte Ihr Zimmer liegen, wenn Sie abends noch Licht brauchen?

Aufgabe 3

Welche der folgenden Formeln sind logisch äquivalent?

(a) $\neg X \to \neg Y$ und $Y \to ((\neg Z \lor \neg X) \to X)$;

(b) $(X \lor Y \lor Z) \land (\neg X \lor Y \lor Z)$ und $Y \lor Z$;

(c) $(X \lor Y \lor Z) \land (\neg X \lor \neg Y \lor Z)$ und Z.

Aufgabe 4 (a) Konstruieren Sie eine Formel $\varphi(X_1, X_2, X_3)$, so dass für alle Interpretationen $\mathfrak{I} : \{X_1, X_2, X_3\} \to \{0, 1\}$ gilt, dass sich durch Ändern genau eines Wahrheitswertes $\mathfrak{I}(X_i)$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) auch der Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}}$ ändert.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Wie viele paarweise nicht-äquivalente Formeln mit dieser Eigenschaft (und freien Variablen $X_1, \ldots, X_n$) kann man maximal finden?