Aufgabe 1

Zeigen Sie mit der Resolutionsmethode, dass folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(Z \to X \vee Y) \wedge (Y \to \neg X \vee Z) \wedge (\neg Z \vee \neg Y) \wedge (X \vee Z) \wedge (X \to Y)$$

Aufgabe 2

Was ist in $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ elementar definierbar?

(a) Das Element $\{17\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(b) Die Teilmenge $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \ : \ |X| = 2\}$.

Aufgabe 3

Sei $\mathfrak{A} = (\mathcal{P}(\{1,2\}), \subseteq)$ und $\mathfrak{B} = (\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq)$.

Was ist die minimale Zahl m, so dass der Herausforderer das Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt? Begründen Sie ihre Antwort!

Aufgabe 4

Welche der folgenden Schlussregeln sind korrekt? Begründen Sie dies auf semantische Weise (d.h. nicht durch Ableiten im Sequenzenkalkül).

(a) $\dfrac{\Gamma, \vartheta \ \Rightarrow \ \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \neg\varphi \ \Rightarrow \ \Delta, \vartheta}{\Gamma, \neg\varphi \ \Rightarrow \ \Delta}$

(b) $\dfrac{\Gamma, \exists x \varphi(x) \ \Rightarrow \ \Delta, \exists x \forall y \psi(x,y)}{\Gamma, \varphi(c) \ \Rightarrow \ \Delta, \forall y \exists x \psi(x,y)}$

(c) $\dfrac{\Gamma, \exists x \varphi(x) \ \Rightarrow \ \Delta, \forall x \exists y \psi(x,y)}{\Gamma, \varphi(c) \ \Rightarrow \ \Delta, \exists y \forall x \psi(x,y)}$

Aufgabe 5

Welche der folgenden Klassen von Strukturen sind (endlich) axiomatisierbar? Geben Sie entweder ein entsprechendes Axiomensystem oder widerlegen Sie dessen Existenz.

(a) Die Klasse der endlichen Cliquen.

(b) Die Klasse der Strukturen (A, f), bei der für alle $a \in A$ und alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $f^n a \neq a$.