

# Mathematische Logik

## SS 2017

Prof. Dr. Erich Grädel

Mathematische Grundlagen der Informatik  
RWTH Aachen

# Inhaltsverzeichnis

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 0   | Notation und Konventionen                                 | 1  |
| 1   | Aussagenlogik   | 3  |
| 1.1 | Syntax und Semantik der Aussagenlogik . . . . .           | 3  |
| 1.2 | Boolesche Funktionen und Normalformen . . . . .           | 10 |
| 1.3 | Horn-Formeln . . . . .                                    | 15 |
| 1.4 | Der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik . . . . .          | 17 |
| 1.5 | Aussagenlogische Resolution . . . . .                     | 24 |
| 1.6 | Der aussagenlogische Sequenzenkalkül . . . . .            | 31 |
| 2   | Syntax und Semantik der Prädikatenlogik                   | 39 |
| 2.1 | Strukturen . . . . .                                      | 40 |
| 2.2 | Ein Zoo von Strukturen . . . . .                          | 42 |
| 2.3 | Syntax der Prädikatenlogik . . . . .                      | 47 |
| 2.4 | Semantik der Prädikatenlogik . . . . .                    | 52 |
| 2.5 | Normalformen . . . . .                                    | 56 |
| 2.6 | Spieltheoretische Semantik . . . . .                      | 65 |
| 3   | Definierbarkeit in der Prädikatenlogik                    | 73 |
| 3.1 | Definierbarkeit . . . . .                                 | 73 |
| 3.2 | Das Isomorphielemma . . . . .                             | 77 |
| 3.3 | Theorien und elementar äquivalente Strukturen . . . . .   | 81 |
| 3.4 | Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele . . . . .                      | 83 |
| 4   | Vollständigkeitsatz, Kompaktheitssatz, Unentscheidbarkeit | 93 |
| 4.1 | Der Sequenzenkalkül . . . . .                             | 93 |
| 4.2 | Der Vollständigkeitsatz . . . . .                         | 96 |
| 4.3 | Der Beweis des Vollständigkeitsatzes . . . . .            | 98 |



This work is licensed under:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/>

Dieses Werk ist lizenziert unter:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/>

© 2017 Mathematische Grundlagen der Informatik, RWTH Aachen.

<http://www.logic.rwth-aachen.de>

|  |     |
|--|-----|
| 4.4 Der Kompaktheitssatz, Axiomatisierbarkeit und Größe von Modellen . . . . . | 109 |
| 4.5 Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik . . . . .                           | 115 |
| 5 Modallogik, temporale Logiken und monadische Logik . . . . .                 | 121 |
| 5.1 Syntax und Semantik der Modallogik . . . . .                               | 121 |
| 5.2 Bisimulation . . . . .   | 125 |
| 5.3 Abwicklungen und Baummodell-Eigenschaft . . . . .                          | 130 |
| 5.4 Temporale Logiken . . . . .  | 131 |
| 5.5 Monadische Logik . . . . .   | 137 |
| Symbole . . . . .  | 139 |

## 3 Definierbarkeit in der Prädikatenlogik

### 3.1 Definierbarkeit

**AXIOMATISIERBARE STRUKTURKLASSEN.** Wir haben bereits in Kapitel 2 den Begriff der durch eine Satzmenge  $\Phi$  axiomatisierten Strukturklasse  $\text{Mod}(\Phi)$  eingeführt und Axiomensysteme für einige wichtige Klassen angegeben, etwa für Graphen, Gruppen, lineare Ordnungen sowie für die Klasse aller unendlichen Strukturen.

**Definition 3.1.** Sei  $(\tau)$  die Klasse aller  $\tau$ -Strukturen. Eine Strukturklasse  $\mathcal{K} \subseteq (\tau)$  ist *FO-axiomatisierbar* (oder einfach: axiomatisierbar), wenn eine Satzmenge  $\Phi \subseteq \text{FO}(\tau)$  existiert, so dass  $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Phi)$ . Wenn das Axiomensystem  $\Phi$  für  $\mathcal{K}$  endlich ist, dann können wir die Konjunktion  $\psi = \bigwedge\{\varphi : \varphi \in \Phi\}$  bilden und damit  $\mathcal{K}$  durch einen einzigen Satz axiomatisieren. Wir sagen in diesem Fall,  $\mathcal{K}$  ist *elementar* oder *endlich axiomatisierbar*.

Wir beginnen in diesem Kapitel mit der Untersuchung der Ausdruckstärke der Prädikatenlogik. Ein wichtiger Aspekt ist dabei die Frage, welche Strukturklassen FO-axiomatisierbar und welche sogar endlich axiomatisierbar sind.

Wir wissen bereits, dass Graphen, Gruppen und lineare Ordnungen endlich axiomatisierbar sind. Weiter ist offensichtlich, dass dasselbe auch für Äquivalenzstrukturen, partielle Ordnungen, dichte lineare Ordnungen, diskrete lineare Ordnungen, Ringe und Körper gilt. Die Klasse aller unendlichen Strukturen ist zwar FO-axiomatisierbar, aber das Axiomensystem  $\Phi_\infty$ , das wir in Kapitel 2.4 dafür angegeben haben, besteht aus unendlich vielen Formeln. (Wir werden später sehen, dass kein endliches Axiomensystem für diese Klasse existiert.)

Hier sind noch einige weitere Beispiele für axiomatisierbare Strukturklassen.

Beispiel 3.2.

- Die Klasse aller Körper ist axiomatisiert durch  $\psi_{\text{Körper}} \in \text{FO}(\tau_{\text{ar}})$ , die Konjunktion aller Körperaxiome. Für jede Primzahl  $p$  ist auch die Klasse der Körper mit Charakteristik  $p$ <sup>1</sup> endlich axiomatisierbar durch  $\psi_{\text{Körper}} \wedge \chi_p$ , wobei  $\chi_p$  der Satz  $\underbrace{1 + \dots + 1}_{p\text{-mal}} = 0$  ist. Für Körper der Charakteristik 0 können wir zumindest ein unendliches Axiomensystem angeben, nämlich

$$\Phi = \{\psi_{\text{Körper}}\} \cup \{\neg\chi_p : p \text{ Primzahl}\}.$$

- Auch die Klasse ACF der algebraisch abgeschlossenen Körper<sup>2</sup> (algebraically closed fields) ist FO-axiomatisierbar. Der Satz

$$\psi_n := \forall u_0 \dots \forall u_n (u_n \neq 0 \rightarrow \exists x (u_0 + u_1 x + \dots + u_n x^n = 0))$$

besagt, dass jedes Polynom  $n$ -ten Grades mit Koeffizienten aus dem Körper auch eine Nullstelle im Körper hat. (Hier ist  $x^n$  als abkürzende Schreibweise für den Term  $\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ mal}}$  aufzufassen.)

Also ist  $\Phi_{\text{ACF}} = \{\psi_{\text{Körper}}\} \cup \{\psi_n : n \geq 1\}$  ein Axiomensystem für algebraisch abgeschlossene Körper.

**Übung 3.1.** Sei  $\mathfrak{A}$  eine endliche Struktur mit endlicher Signatur. Zeigen Sie, dass die Klasse  $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$  der zu  $\mathfrak{A}$  isomorphen Strukturen endlich axiomatisierbar ist.

Der Nachweis, dass eine Strukturklasse (endlich) axiomatisierbar ist, wird in der Regel durch explizite Angabe eines Axiomensystems geführt. Um nachzuweisen, dass eine Strukturklasse gar kein oder zumindest kein endliches Axiomensystem zulässt, sind andere Methoden erforderlich, welche in diesem und dem folgenden Kapitel entwickelt werden sollen.

<sup>1</sup>Ein Körper hat Charakteristik  $p$ , wenn  $p$  die kleinste natürliche Zahl ist, sodass  $p$ -faches addieren des Einselements das Nullelement ergibt. Falls kein solches  $p$  existiert, hat der Körper Charakteristik 0.

<sup>2</sup>Ein Körper  $K$  ist algebraisch abgeschlossen, wenn jedes nicht-konstante Polynom mit Koeffizienten aus  $K$  eine Nullstelle in  $K$  besitzt.

Zunächst aber diskutieren wir noch einen anderen Aspekt der Ausdrucksstärke einer Logik.

**DEFINIERBARKEIT IN EINER STRUKTUR.** Neben der Frage, welche Strukturklassen durch Sätze oder Satzmenge der Prädikatenlogik axiomatisierbar sind, können wir die Ausdrucksstärke von FO auch innerhalb einer festen Struktur untersuchen.

Sei  $\psi(x_1, \dots, x_r) \in \text{FO}(\tau)$  und  $\mathfrak{A}$  eine  $\tau$ -Struktur. Dann definiert  $\psi$  in  $\mathfrak{A}$  die  $r$ -stellige Relation

$$\psi^{\mathfrak{A}} := \{(a_1, \dots, a_r) : \mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots, a_r)\} \subseteq A^r.$$

**Definition 3.3.** Eine Relation  $R \subseteq A^r$  auf dem Universum einer  $\tau$ -Struktur  $\mathfrak{A}$  ist (*elementar*) *definierbar* in  $\mathfrak{A}$ , wenn  $R = \psi^{\mathfrak{A}}$  für eine Formel  $\psi \in \text{FO}(\tau)$ . Eine Funktion  $f : A^r \rightarrow A$  heißt *elementar definierbar*, wenn ihr Graph  $R_f$  elementar definierbar ist.

Insbesondere ist also eine Konstante  $a$  elementar definierbar, wenn eine Formel  $\varphi(x) \in \text{FO}(\tau)$  existiert, so dass  $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$  und  $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(b)$  für alle  $b \neq a$ . Wir sagen,  $a$  ist *termdefinierbar* in  $\mathfrak{A}$ , wenn ein Grundterm  $t \in T(\tau)$  existiert, so dass  $t^{\mathfrak{A}} = a$ . Jede termdefinierbare Konstante ist insbesondere elementar definierbar durch eine Formel der Form  $x = t$ .

Beispiel 3.4.

- Die Ordnungsrelation  $<$  auf  $\mathbb{R}$  ist elementar definierbar in  $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ , denn für die Formel  $\varphi(x, y) := \exists z (z \neq 0 \wedge x + z \cdot z = y)$  gilt:

$$a < b \text{ gdw. } (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1) \models \varphi(a, b).$$

- In  $(\mathbb{Z}, <)$  ist die Nachfolgerfunktion  $z \mapsto z + 1$  elementar definierbar durch die Formel  $\varphi(x, y) := x < y \wedge \forall z (x < z \wedge y \neq z \rightarrow y < z)$ .
- In  $(\mathbb{N}, +, 0, 1)$  ist jedes  $n$  termdefinierbar durch den Term  $\underline{n} = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ mal}}$  (für  $n \geq 1$ ).

- Im Körper  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$  der rationalen Zahlen sind die termdefinierbaren Konstanten genau die natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ . Alle anderen Elemente sind elementar definierbar durch Formeln der Form  $\underline{p} \cdot x = \underline{q}$  oder  $\underline{p} \cdot x + \underline{q} = 0$ , nicht aber termdefinierbar.
- Im Körper der reellen Zahlen können schon aus Mächtigkeitsgründen nicht alle Elemente elementar definierbar sein: Es gibt überabzählbar viele reelle Zahlen, aber nur abzählbar viele Formeln  $\varphi(x) \in \text{FO}(\tau_{\text{ar}})$ .

Als nächstes beobachten wir, dass das Hinzunehmen definierbarer Relationen zu einer Struktur keinen Gewinn an Ausdruckstärke bringt.

**Lemma 3.5.** Sei  $\mathfrak{A}$  eine  $\sigma$ -Struktur und  $\mathfrak{B}$  eine Expansion von  $\mathfrak{A}$  durch beliebig viele, in  $\mathfrak{A}$  elementar definierbare Relationen und Funktionen. Dann ist jede in  $\mathfrak{B}$  elementar definierbare Relation oder Funktion bereits in  $\mathfrak{A}$  elementar definierbar.

*Beweis.* Sei  $\tau$  die Signatur von  $\mathfrak{B}$ . In jeder Formel  $\psi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$  kommen nur endlich viele Relations- und Funktionssymbole  $R_1, \dots, R_s$  bzw.  $f_1, \dots, f_t$  aus  $\tau \setminus \sigma$  vor. Zu jedem dieser  $R_i$  bzw.  $f_j$  gibt es eine  $\sigma$ -Formel  $\theta_i(\bar{y})$  bzw.  $\chi_j(\bar{y}, z)$ , welche in  $\mathfrak{A}$  die entsprechende Relation bzw. Funktion von  $\mathfrak{B}$  definiert.

Weiter können wir nach Lemma 2.19 annehmen, dass  $\psi$  termreduziert ist, d.h. dass Funktionssymbole aus  $\tau \setminus \sigma$  nur in Atomen der Form  $f_j \bar{y} = z$  auftreten. Indem wir in  $\psi(\bar{x})$  die Relations- und Funktionssymbole aus  $\tau \setminus \sigma$  durch die definierenden Formeln ersetzen (d.h. jedes Atom  $R_i \bar{u}$  durch  $\theta_i(\bar{u})$  und jedes Atom  $f_j \bar{u} = v$  durch  $\chi_j(\bar{u}, v)$ ), erhalten wir eine Formel  $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\sigma)$ , so dass  $\mathfrak{B} \models \forall \bar{x} (\psi \leftrightarrow \varphi)$ . Da  $\varphi$  eine  $\sigma$ -Formel ist, folgt insbesondere  $\psi^{\mathfrak{B}} = \varphi^{\mathfrak{A}}$ . Q.E.D.

**EXKURS: RELATIVIERTE QUANTOREN.** Wir illustrieren hier die Verwendung relativierter Quantoren an einem Beispiel.

*Stetigkeit.* Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf den reellen Zahlen. Ist die Menge  $\{a \in \mathbb{R} : f \text{ stetig im Punkt } a\}$  in der Struktur  $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, f)$  elementar definierbar?

Wir betrachten dazu die Stetigkeitsdefinition aus der Analysis: Sei  $U_\varepsilon(x)$  die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$ . Die Funktion  $f$  ist stetig in  $x$ , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $y \in U_\delta(x)$  gilt:  $f(y) \in U_\varepsilon(f(x))$ .

Die Existenz- und Allaussagen für  $\delta, \varepsilon$  und  $y$  sind hier *relativiert*: es werden nur Elemente betrachtet, die gewisse Eigenschaften erfüllen. Man beachte, dass relativierte Aussagen der Form „es gibt ein  $x$  mit  $\alpha$ , so dass ...“ bzw. „für alle  $x$  mit  $\alpha$  gilt ...“ durch  $\exists x(\alpha \wedge \dots)$  bzw.  $\forall x(\alpha \rightarrow \dots)$  formalisiert werden können. Gelegentlich wird die Schreibweise  $(\exists x. \alpha)\psi$  als Umschreibung für  $\exists x(\alpha \wedge \psi)$  und  $(\forall x. \alpha)\psi$  für  $\forall x(\alpha \rightarrow \psi)$  benutzt.<sup>3</sup>

Um Stetigkeit zu formalisieren, gehen wir nun wie folgt vor. (Wir verwenden die Relation  $\leq$ , was aufgrund ihrer elementaren Definierbarkeit unproblematisch ist.) Zunächst ist leicht einzusehen, dass die Relation  $\{(a, b, \varepsilon) \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon \geq 0 \text{ und } b \in U_\varepsilon(a)\}$  durch die Formel

$$\varphi(x, y, z) := 0 \leq z \wedge (\exists u. 0 \leq u \leq z)(x + u = y \vee y + u = x)$$

definiert wird. Die Stetigkeit von  $f$  im Punkt  $x$  wird nun beschrieben durch den Ausdruck

$$\psi(x) := (\forall u. 0 < u)(\exists z. 0 < z) \forall y (\varphi(x, y, z) \rightarrow \varphi(fx, fy, u)).$$

Mit den oben dargestellten Äquivalenzen lässt sich die Stetigkeit dann als Formel der Prädikatenlogik ausdrücken.

### 3.2 Das Isomorphielemma

Zwei Strukturen sind isomorph, wenn sie sich nur durch Umbenennung der Elemente des Universums unterscheiden. Logiken sollen, im Gegensatz zu Algorithmen, nur Aussagen über Eigenschaften einer Struktur treffen, die unabhängig von deren Kodierung sind. Daher wird, um zu prüfen, ob ein Formalismus eine sinnvolle Logik ist, sichergestellt, dass sie nicht zwischen isomorphen Strukturen unterscheiden kann. Im

<sup>3</sup>Beachten Sie jedoch, dass im Rahmen der Vorlesung und Übung mit „Prädikatenlogik“ immer die Logik ohne die so erweiterte Syntax gemeint ist (da sich insbesondere nicht alle vorgestellten Beweise und Verfahren direkt auf diese Schreibweise übertragen lassen).

folgenden beweisen wir das Isomorphielemma, das besagt, dass die Prädikatenlogik in diesem Sinne eine sinnvolle Logik ist.

**Definition 3.6.**  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  seien  $\tau$ -Strukturen. Ein *Isomorphismus* von  $\mathfrak{A}$  nach  $\mathfrak{B}$  ist eine bijektive Abbildung  $\pi : A \rightarrow B$ , so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Für jedes ( $n$ -stellige) Relationssymbol  $R \in \tau$  und alle  $a_1, \dots, a_n \in A$  gilt:

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ gdw. } (\pi a_1, \dots, \pi a_n) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

- (2) Für jedes ( $n$ -stellige) Funktionssymbol  $f \in \tau$  und alle  $a_1, \dots, a_n \in A$  gilt:

$$\pi f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(\pi a_1, \dots, \pi a_n).$$

*Bemerkung 3.7.* Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  lässt sich  $\pi$  auf natürliche Weise zu einer Abbildung  $\pi : A^n \rightarrow B^n$  erweitern mit  $\pi(a_1, \dots, a_n) := (\pi a_1, \dots, \pi a_n)$ . Bedingung (1) können wir dann auch so formulieren: Für alle Relationssymbole  $R \in \tau$  ist  $\pi(R^{\mathfrak{A}}) = R^{\mathfrak{B}}$ . Bedingung (2) bedeutet, dass für alle Funktionssymbole  $f \in \tau$  gilt:  $\pi \circ f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \circ \pi$ .

Für nullstellige Funktionssymbole  $c$  besagt Bedingung (2), dass  $\pi c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$ .

**Definition 3.8.** Zwei  $\tau$ -Strukturen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  sind *isomorph* (kurz:  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ ), wenn ein Isomorphismus von  $\mathfrak{A}$  nach  $\mathfrak{B}$  existiert. Ein Isomorphismus  $\pi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}$  heißt *Automorphismus* von  $\mathfrak{A}$ .

*Notation.* Wir schreiben  $\pi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$  um anzudeuten, dass  $\pi$  ein Isomorphismus ist. Die Identitätsabbildung auf  $\mathfrak{A}$  bezeichnen wir mit  $1_{\mathfrak{A}}$ .

Die Menge aller Automorphismen einer Struktur  $\mathfrak{A}$  bilden bezüglich Hintereinanderausführung eine Gruppe mit neutralem Element  $1_{\mathfrak{A}}$ . Wir nennen sie die *Automorphismengruppe* oder *Symmetriegruppe* von  $\mathfrak{A}$  und bezeichnen sie mit  $\text{Aut}(\mathfrak{A})$ . Eine Struktur  $\mathfrak{A}$  ist *starr*, wenn  $\text{Aut}(\mathfrak{A}) = \{1_{\mathfrak{A}}\}$ , d.h. wenn der triviale Automorphismus  $1_{\mathfrak{A}}$  der einzige Automorphismus der Struktur ist.

Isomorphe Strukturen betrachten wir als gleich. Insbesondere können FO-Formeln nicht zwischen isomorphen Strukturen unterscheiden.

**Lemma 3.9** (Isomorphielemma). Sei  $\pi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$  ein Isomorphismus von  $\tau$ -Strukturen. Dann gilt für alle  $\psi(x_1, \dots, x_n) \in \text{FO}(\tau)$  und alle  $a_1, \dots, a_n \in A$ :

$$\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots, a_n) \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \psi(\pi a_1, \dots, \pi a_n).$$

*Beweis.* Per Induktion über den Termaufbau zeigt man sofort, dass für jeden Term  $t(\bar{x}) \in \text{T}(\tau)$  mit Variablen aus  $x_1, \dots, x_n$  und für alle  $\bar{a} = a_1, \dots, a_n$  gilt:

$$\pi \llbracket t(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}} = \llbracket t(\pi \bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{B}}. \quad (*)$$

Wir führen nun den Beweis per Induktion über den Formelaufbau; nach Lemma 2.16 können wir dabei annehmen, dass  $\psi$  reduziert ist.

- (1) Für Formeln der Form  $t_1(\bar{x}) = t_2(\bar{x})$  gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models t_1(\bar{a}) = t_2(\bar{a}) \text{ gdw. } \llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}} &= \llbracket t_2(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}} \\ \text{gdw. } \pi \llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}} &= \pi \llbracket t_2(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}} \\ &\text{(da } \pi \text{ injektiv ist)} \\ \text{gdw. } \llbracket t_1(\pi \bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{B}} &= \llbracket t_2(\pi \bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{B}} \\ &\text{(nach (*))} \\ \text{gdw. } \mathfrak{B} \models t_1(\pi \bar{a}) &= t_2(\pi \bar{a}) \end{aligned}$$

- (2) Für Atome  $Pt_1 \dots t_n$  gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models Pt_1(\bar{a}) \dots t_n(\bar{a}) \text{ gdw. } (\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_n(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}) &\in P^{\mathfrak{A}} \\ \text{gdw. } (\pi \llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}, \dots, \pi \llbracket t_n(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}) &\in P^{\mathfrak{B}} \\ &\text{(da } \pi \text{ ein Isomorphismus ist)} \\ \text{gdw. } (\llbracket t_1(\pi \bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{B}}, \dots, \llbracket t_n(\pi \bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{B}}) &\in P^{\mathfrak{B}} \\ &\text{(nach (*))} \\ \text{gdw. } \mathfrak{B} \models Pt_1(\pi \bar{a}) \dots t_n(\pi \bar{a}) & \end{aligned}$$

(3) Für Formeln der Form  $\neg\psi$  oder  $\psi \vee \varphi$  ist der Induktionsschluss trivial.

(4) Für Formeln  $\exists y\psi(\bar{x}, y)$  gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \exists y\psi(\bar{a}, y) &\text{ gdw. } \mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, c) \text{ für ein } c \in A \\ &\text{gdw. } \mathfrak{B} \models \psi(\pi\bar{a}, \pi c) \text{ für ein } c \in A \\ &\quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &\text{gdw. } \mathfrak{B} \models \psi(\pi\bar{a}, b) \text{ für ein } b \in B \\ &\quad \text{(da } \pi \text{ bijektiv ist)} \\ &\text{gdw. } \mathfrak{B} \models \exists y\psi(\pi\bar{a}, y). \end{aligned} \quad \text{Q.E.D.}$$

Insbesondere lassen sich isomorphe  $\tau$ -Strukturen durch Sätze der Prädikatenlogik nicht unterscheiden. Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  isomorphe  $\tau$ -Strukturen, so gilt für alle  $\tau$ -Sätze  $\psi$ :

$$\mathfrak{A} \models \psi \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \psi.$$

Daraus folgt, dass axiomatisierbare Modellklassen unter Isomorphie abgeschlossen sind. Dies bedeutet, dass für jede Klasse  $\mathcal{K} = \text{Mod}(\psi)$  und jedes Paar von isomorphen Strukturen  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$  gilt:

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{K} \text{ gdw. } \mathfrak{B} \in \mathcal{K}.$$

In manchen Fällen liefert das Isomorphielemma ein einfaches Kriterium, um nachzuweisen, dass eine Relation in einer Struktur *nicht* elementar definierbar ist: Wir zeigen, dass sich nach dem Isomorphielemma nur Eigenschaften in FO definieren lassen, die unter Automorphismen erhalten bleiben.

**Lemma 3.10.** Sei  $\pi$  ein Automorphismus einer  $\tau$ -Struktur  $\mathfrak{A}$ , und sei  $\psi \in \text{FO}(\tau)$ . Dann ist  $\pi$  auch ein Automorphismus der expandierten Struktur  $(\mathfrak{A}, \psi^{\mathfrak{A}})$ .

*Beweis.* Da  $\pi$  ein Automorphismus ist, gilt für alle Tupel  $\bar{a}$  aus  $A$ :

$$\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}) \text{ gdw. } \mathfrak{A} \models \psi(\pi\bar{a}).$$

Also ist  $\pi(\psi^{\mathfrak{A}}) = \psi^{\mathfrak{A}}$ .

Q.E.D.

Natürlich folgt aus dem Isomorphielemma, dass  $\pi$  nicht in  $\mathfrak{A}$  definierbar sein kann.

*Beispiel 3.11.* Wir haben gesehen, dass  $<$  definierbar ist in  $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ . Aus dem soeben bewiesenen Lemma folgt dagegen, dass  $<$  in  $(\mathbb{R}, +, 0)$  *nicht* elementar definierbar ist. Die Abbildung  $\pi : x \mapsto -x$  ist nämlich ein Automorphismus von  $(\mathbb{R}, +, 0)$ , nicht aber von  $(\mathbb{R}, +, 0, <)$ , denn aus  $a < b$  folgt eben gerade *nicht*  $-a < -b$ .

**Übung 3.2.** Sei  $\tau = \emptyset$  und  $A$  unendlich. Beschreiben Sie alle in  $A$  elementar definierbaren Relationen  $R \subseteq A^n$ .

**Übung 3.3.** Zeigen Sie, dass in  $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$  die Addition nicht elementar definierbar ist.

### 3.3 Theorien und elementar äquivalente Strukturen

Das Isomorphielemma liefert ein Kriterium dafür, dass bestimmte Strukturen in FO nicht unterscheidbar sind. Die Definition der Nichtunterscheidbarkeit, genannt elementare Äquivalenz, basiert auf dem Begriff der Theorie:

**Definition 3.12.** Eine *Theorie* ist eine erfüllbare Menge  $T \subseteq \text{FO}(\tau)$  von Sätzen, die unter  $\models$  abgeschlossen ist, d.h. es gilt für alle  $\tau$ -Sätze  $\psi$  mit  $T \models \psi$ , dass  $\psi \in T$  gilt.

Eine Theorie  $T$  ist *vollständig*, wenn für jeden Satz  $\psi \in \text{FO}(\tau)$  entweder  $\psi \in T$  oder  $\neg\psi \in T$  gilt.

Sei  $\mathfrak{A}$  eine  $\tau$ -Struktur. Die *Theorie von*  $\mathfrak{A}$  ist  $\text{Th}(\mathfrak{A}) := \{\psi : \mathfrak{A} \models \psi\}$ . Offensichtlich ist  $\text{Th}(\mathfrak{A})$  vollständig. Die Theorie einer  $\tau$ -Modellklasse  $\mathcal{K}$  ist

$$\text{Th}(\mathcal{K}) = \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{K}} \text{Th}(\mathfrak{A}).$$

Wenn  $\Phi$  ein Axiomensystem für  $\mathcal{K}$  ist, dann ist  $\text{Th}(\mathcal{K}) = \{\psi : \Phi \models \psi\}$ .

Natürlich ist nicht jede Theorie vollständig. Zum Beispiel enthält die Theorie der Gruppen weder den Satz  $\forall x \forall y (x \circ y = y \circ x)$  noch

seine Negation, da es sowohl kommutative wie nicht-kommutative Gruppen gibt. Jede Theorie  $T$  lässt sich aber zu einer vollständigen Theorie erweitern; für jedes Modell  $\mathfrak{A} \models T$  ist  $\text{Th}(\mathfrak{A})$  eine vollständige Erweiterung von  $T$ .

**Definition 3.13.** Zwei  $\tau$ -Strukturen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  sind *elementar äquivalent* (kurz:  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ ), wenn  $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{B})$ , d.h. wenn für alle  $\tau$ -Sätze  $\psi$  gilt:

$$\mathfrak{A} \models \psi \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \psi.$$

**Lemma 3.14.** Eine Theorie ist genau dann vollständig, wenn alle ihre Modelle elementar äquivalent sind.

*Beweis.* Sei  $T$  eine vollständige Theorie. Für jedes Modell  $\mathfrak{A} \models T$  gilt  $T \subseteq \text{Th}(\mathfrak{A})$  und wegen der Vollständigkeit von  $T$  daher sogar  $T = \text{Th}(\mathfrak{A})$ . Also haben alle Modelle von  $T$  dieselbe Theorie.

Wenn andererseits  $T$  nicht vollständig ist, dann gibt es einen Satz  $\psi$ , so dass sowohl  $T \cup \{\psi\}$  und  $T \cup \{\neg\psi\}$  erfüllbar sind.  $T$  besitzt daher zwei nicht elementar äquivalente Modelle. Q.E.D.

Aus dem Isomorphielemma folgt unmittelbar, dass isomorphe Strukturen auch elementar äquivalent sind. Wie wir später sehen werden, gilt die Umkehrung dieser Aussage nicht.

**Definition 3.15.** Der *Quantorenrang*  $\text{qr}(\psi)$  einer Formel  $\psi$  ist definiert durch:

- (1)  $\text{qr}(\psi) = 0$  für quantorenfreie  $\psi$ ,
- (2)  $\text{qr}(\neg\psi) = \text{qr}(\psi)$ ,
- (3)  $\text{qr}(\psi \circ \varphi) = \max(\text{qr}(\psi), \text{qr}(\varphi))$  für  $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$  und
- (4)  $\text{qr}(\exists x\psi) = \text{qr}(\forall x\psi) = \text{qr}(\psi) + 1$ .

Der Quantorenrang ist also die maximale Schachtelungstiefe von Quantoren in der gegebenen Formel.

*Beispiel 3.16.* Der Quantorenrang von  $\forall x(\exists yPxy \rightarrow \forall zPxz)$  ist 2. Eine äquivalente Formel in PNF ist  $\forall x\forall y\forall z(Pxy \rightarrow Pxz)$ . Man beachte, dass die Transformation in PNF in der Regel den Quantorenrang erhöht.

**Definition 3.17.** Zwei  $\tau$ -Strukturen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  sind  *$m$ -äquivalent* ( $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ ), wenn für alle  $\tau$ -Sätze  $\psi$  mit  $\text{qr}(\psi) \leq m$  gilt:

$$\mathfrak{A} \models \psi \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \psi.$$

Wir erweitern die Begriffe der elementaren Äquivalenz und der  $m$ -Äquivalenz auf Strukturen mit Parametern, d.h. Strukturen, in denen zusätzlich gewisse Elemente ausgezeichnet sind. Seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$   $\tau$ -Strukturen, und  $\bar{a} = a_1, \dots, a_r$ ,  $\bar{b} = b_1, \dots, b_r$  Tupel von Elementen aus  $A$  bzw.  $B$ . Dann ist  $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b})$ , wenn für alle  $\tau$ -Formeln  $\psi(x_1, \dots, x_r)$  gilt:  $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$  gdw.  $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{b})$ . Analog definiert man  $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathfrak{B}, \bar{b})$ .

### 3.4 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

- That isn't the way to play it.
- Why not?
- 'Cause it isn't the way to win.
- Is there a way to win?
- Well, there's a way to lose more slowly.

*Robert Mitchum, Jane Greer, in: Out of the Past*

In diesem Abschnitt präsentieren wir eine spieltheoretische Methode, um elementare Äquivalenz und  $m$ -Äquivalenz nachzuweisen. Solche Methoden liefern eine vergleichsweise intuitive Möglichkeit, zu beweisen, dass eine Eigenschaft nicht logisch definierbar ist.

Der Einfachheit halber betrachten wir für den Rest dieses Kapitels nur relationale Strukturen.

**Definition 3.18.** Sei  $\tau$  eine relationale Signatur und  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$   $\tau$ -Strukturen. Ein *lokaler (oder partieller) Isomorphismus* von  $\mathfrak{A}$  nach  $\mathfrak{B}$  ist eine injektive Abbildung  $p : \text{dom}(p) \rightarrow B$  wobei  $\text{dom}(p) \subseteq A$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$ , alle  $n$ -stelligen Relationssymbole  $R \in \tau$  und alle  $a_1, \dots, a_n \in \text{dom}(p)$  gilt:

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ gdw. } (pa_1, \dots, pa_n) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

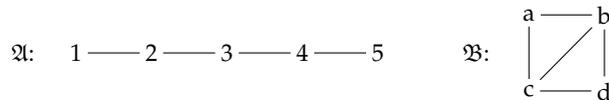
Die Menge aller lokalen Isomorphismen von  $\mathfrak{A}$  nach  $\mathfrak{B}$  bezeichnen wir mit  $\text{Loc}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ .

Lokale Isomorphismen erhalten also auf einer Substruktur Gleichheiten und Relationen, und damit genau die Eigenschaften, die mit atomaren Formeln über Elementen der Substruktur ausgedrückt werden können.

Das Bild von  $p$  ist  $\text{bild}(p) := \{pa : a \in \text{dom}(p)\}$ . Die *leere Abbildung*  $p$  mit  $\text{dom}(p) = \text{bild}(p) = \emptyset$  ist trivialerweise ein lokaler Isomorphismus. Ein nicht-leerer lokaler Isomorphismus ist ein Isomorphismus zwischen den von  $\text{dom}(p)$  und  $\text{bild}(p)$  induzierten Substrukturen von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ . Wir identifizieren einen lokalen Isomorphismus  $p$  oft mit seinem Graphen, d.h. mit der Menge  $\{(a, pa) : a \in \text{dom}(p)\}$ . Insbesondere nennen wir  $p$  endlich, wenn sein Graph endlich ist.

Beispiel 3.19.

- Betrachte die beiden folgenden Graphen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ :



Dann ist  $p = \{(2, a), (3, b), (4, d)\}$  ein lokaler Isomorphismus von  $\mathfrak{A}$  nach  $\mathfrak{B}$ .

- Seien  $(\mathfrak{A}, <^{\mathfrak{A}})$  und  $\mathfrak{B} = (B, <^{\mathfrak{B}})$  lineare Ordnungen und  $a_1, \dots, a_n$  paarweise verschiedene Elemente von  $A$ . Eine Abbildung  $p : a_1 \mapsto b_1, \dots, a_n \mapsto b_n$  ist ein lokaler Isomorphismus von  $\mathfrak{A}$  nach  $\mathfrak{B}$  genau dann wenn eine Permutation  $s : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  existiert sodass  $a_{s(1)} <^{\mathfrak{A}} a_{s(2)} <^{\mathfrak{A}} \dots <^{\mathfrak{A}} a_{s(n)}$  und  $b_{s(1)} <^{\mathfrak{B}} b_{s(2)} <^{\mathfrak{B}} \dots <^{\mathfrak{B}} b_{s(n)}$ .

DAS SPIEL  $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ . Das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel  $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  wird von zwei Spielern nach folgenden Regeln gespielt.

Das *Spielfeld* besteht aus den Strukturen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ . Wir setzen dabei voraus, dass  $A \cap B = \emptyset$ . Die Spieler sind der *Herausforderer* und die *Duplikatorin*, oft auch bezeichnet als Spieler I und II. Eine Partie besteht aus  $m$  Zügen.

Im  $i$ -ten Zug bestimmt der Herausforderer entweder ein Element  $a_i \in A$  oder ein  $b_i \in B$ . Die Duplikatorin antwortet, indem sie ein Element aus der jeweils anderen Struktur auswählt.

Nach  $m$  Zügen sind also Elemente  $a_1, \dots, a_m$  aus  $\mathfrak{A}$  und  $b_1, \dots, b_m$  aus  $\mathfrak{B}$  ausgezeichnet. Die Duplikatorin hat die Partie gewonnen, wenn die Menge  $\{(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)\}$  ein lokaler Isomorphismus von  $\mathfrak{A}$  nach  $\mathfrak{B}$  ist. Anderenfalls hat der Herausforderer gewonnen.

Nach  $i$  Zügen in  $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  ist eine *Position*  $(a_1, \dots, a_i, b_1, \dots, b_i)$  erreicht. Das verbleibende Teilspiel, mit  $m - i$  Zügen, bezeichnen wir mit  $G_{m-i}(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_i, \mathfrak{B}, b_1, \dots, b_i)$ .

Eine *Gewinnstrategie* des Herausforderers für ein solches (Teil-)Spiel ist eine Funktion, die ihm in jeder erreichbaren Position mögliche Züge nennt, mit denen er die Partie gewinnt, egal wie seine Gegnerin spielt. Analog sind Gewinnstrategien für die Duplikatorin definiert.

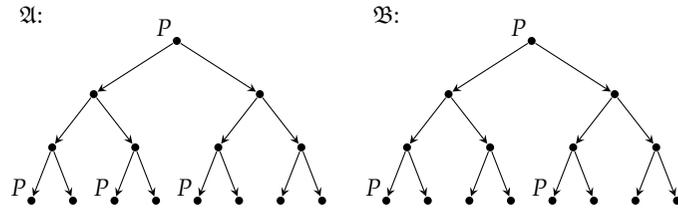
Wir sagen, *der Herausforderer (bzw. die Duplikatorin) gewinnt das Spiel*  $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ , wenn er (bzw. sie) eine Gewinnstrategie dafür hat. Per Induktion über die Anzahl der Züge zeigt man leicht, dass für jedes (Teil-)Spiel genau einer der Spieler eine Gewinnstrategie hat (vgl. Übung 2.3).

Beispiel 3.20.

- Sei  $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, <)$ ,  $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$ . Die Duplikatorin gewinnt  $G_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ , aber der Herausforderer gewinnt  $G_3(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  (siehe auch Beispiel 3.23).
- Für  $\tau = \{E, P\}$  (wobei  $P$  einstelliges und  $E$  zweistelliges Relationssymbol) betrachte die beiden Strukturen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  in Abbildung 3.1. Auch hier gewinnt der Herausforderer  $G_3(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ , die Duplikatorin aber  $G_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  (Beweis: Übung).

DAS SPIEL  $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ . Eine wichtige Variante ist das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel  $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  ohne feste Beschränkung der Anzahl der Züge: In jeder Partie bestimmt der Herausforderer zunächst ein  $m \in \mathbb{N}$ , dann wird das Spiel  $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  gespielt.

Der Herausforderer gewinnt also das Spiel  $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  genau dann, wenn es ein  $m \in \mathbb{N}$  gibt so, dass er das Spiel  $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  gewinnt. Anders

Abbildung 3.1. Zwei Strukturen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  mit  $\mathfrak{A} \equiv_2 \mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{A} \not\equiv_3 \mathfrak{B}$ 

ausgedrückt: die Duplikatorin gewinnt  $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  genau dann, wenn sie für jedes der Spiele  $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  eine Gewinnstrategie besitzt.

**Satz 3.21** (Ehrenfeucht, Fraïssé). Sei  $\tau$  endlich und relational,  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$   $\tau$ -Strukturen.

- (1) Folgende Aussagen sind äquivalent:
  - (i)  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ .
  - (ii) Die Duplikatorin gewinnt das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel  $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ .
- (2) Für alle  $m \in \mathbb{N}$  sind folgende Aussagen äquivalent:
  - (i)  $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ .
  - (ii) Die Duplikatorin gewinnt  $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ .

Wir führen hier nur den Beweis, dass eine Gewinnstrategie der Duplikatorin für das Spiel  $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  (bzw. für  $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ) die elementare Äquivalenz (bzw.  $m$ -Äquivalenz) von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  impliziert. Dazu beweisen wir die folgende etwas stärkere Aussage.

**Satz 3.22.** Seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$   $\tau$ -Strukturen,  $\bar{a} = a_1, \dots, a_r \in A$ ,  $\bar{b} = b_1, \dots, b_r \in B$ . Wenn es eine Formel  $\psi(\bar{x})$  mit  $\text{qr}(\psi) = m$  gibt, so dass  $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$  und  $\mathfrak{B} \models \neg\psi(\bar{b})$ , dann hat der Herausforderer eine Gewinnstrategie für  $G_m(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ .

*Beweis.* Sei  $m = 0$ . Quantorenfreie Formeln sind Boolesche Kombinationen von atomaren Formeln. Wenn  $\mathfrak{A}, \bar{a}$  und  $\mathfrak{B}, \bar{b}$  durch eine quantorenfreie Formel unterschieden werden, dann also bereits durch ein Atom. Daraus folgt, dass  $\{(a_1, b_1), \dots, (a_r, b_r)\}$  kein partieller Isomorphismus von  $\mathfrak{A}$  nach  $\mathfrak{B}$  ist, also gewinnt der Herausforderer  $G_0(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ .

Sei nun  $\text{qr}(\psi) = m > 0$ ,  $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$  und  $\mathfrak{B} \models \neg\psi(\bar{b})$ . Die Formel  $\psi(\bar{x})$  ist eine Boolesche Kombination von Formeln mit Quantorenrang  $< m$  und von Formeln der Form  $\exists y\varphi(\bar{x}, y)$  mit  $\text{qr}(\varphi) = m - 1$ . Es muss also mindestens eine Formel dieser Gestalt geben, welche  $\mathfrak{A}, \bar{a}$  und  $\mathfrak{B}, \bar{b}$  unterscheidet. Wenn diese Formel Quantorenrang  $< m$  hat, dann hat nach Induktionsvoraussetzung der Herausforderer eine Gewinnstrategie für  $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$  und also erst recht für  $G_m(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ . Andernfalls gibt es eine Formel  $\exists y\varphi(\bar{x}, y)$  mit  $\text{qr}(\varphi) = m - 1$ , so dass entweder

- (1)  $\mathfrak{A} \models \exists y\varphi(\bar{a}, y)$  und  $\mathfrak{B} \models \forall y\neg\varphi(\bar{b}, y)$  oder
- (2)  $\mathfrak{A} \models \forall y\neg\varphi(\bar{a}, y)$  und  $\mathfrak{B} \models \exists y\varphi(\bar{b}, y)$ .

Im Fall (1) wählt der Herausforderer im ersten Zug ein  $c \in A$  mit  $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}, c)$ . Für jedes beliebige  $d \in B$ , welches die Duplikatorin wählen kann, gilt  $\mathfrak{B} \models \neg\varphi(\bar{b}, d)$ . Nach Induktionsvoraussetzung gewinnt der Herausforderer das Restspiel  $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \bar{a}, c, \mathfrak{B}, \bar{b}, d)$ . Im Fall (2) gewinnt der Herausforderer, indem er ein  $d \in B$  mit  $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b}, d)$  wählt. Die Duplikatorin wählt ein beliebiges  $c \in A$ . Also ist nach diesem Zug eine Position  $(\bar{a}, c, \bar{b}, d)$  erreicht mit  $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(\bar{a}, c)$  und  $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b}, d)$ . Da  $\text{qr}(\neg\varphi) = \text{qr}(\varphi) = m - 1$ , gewinnt der Herausforderer nach Induktionsvoraussetzung das verbleibende Teilspiel  $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \bar{a}, c, \mathfrak{B}, \bar{b}, d)$ . Q.E.D.

Daraus erhalten wir (indem wir  $r = 0$  setzen und somit Sätze betrachten) die Implikationen (ii)  $\Rightarrow$  (i) des Satzes von Ehrenfeucht und Fraïssé:

- (1) Wenn die Duplikatorin das Spiel  $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  gewinnt, so gilt  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ ;
- (2) Wenn die Duplikatorin das Spiel  $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  gewinnt, so gilt  $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ .

*Beispiel 3.23.* Die Strukturen  $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, <)$ ,  $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$  lassen sich durch einen Satz  $\psi$  vom Quantorenrang 3 trennen, welcher ausdrückt, dass  $<$  nicht dicht ist:

$$\psi := \exists x\exists y(x < y \wedge \forall z(\neg(x < z \wedge z < y))).$$

Nach dem Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé gewinnt der Herausforderer also  $G_3(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ . Eine Gewinnstrategie des Herausforderers besteht darin,

in den ersten beiden Zügen zwei aufeinanderfolgende Elemente  $a$  und  $a + 1$  von  $\mathbb{Z}$  zu wählen. Die Duplikatorin muss mit zwei Elementen  $r, s \in \mathbb{R}$  antworten, so dass  $r < s$ . Aber dann gewinnt der Herausforderer, indem er im dritten Zug ein Element  $t \in \mathbb{R}$  mit  $r < t < s$  wählt. Hier ist insbesondere zu sehen, dass der Herausforderer gewinnt, indem er die Struktur wechselt.

**ANWENDUNGEN.** Der Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé liefert eine wichtige Methode, um zu zeigen, dass eine Modellklasse  $\mathcal{K}$  *nicht* elementar axiomatisierbar ist. Wenn es gelingt, Strukturen  $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$  und  $\mathfrak{B} \notin \mathcal{K}$  zu finden, so dass die Duplikatorin das Spiel  $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  gewinnt, dann folgt, dass kein FO-Satz  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  unterscheiden kann, und damit auch kein FO-Satz  $\mathcal{K}$  axiomatisiert.

Eine stärkere Variante der Ehrenfeucht-Fraïssé-Methode besteht darin, Folgen  $(\mathfrak{A}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  und  $(\mathfrak{B}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  von  $\tau$ -Strukturen zu konstruieren, so dass für alle  $m$ ,  $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$ ,  $\mathfrak{B}_m \notin \mathcal{K}$  und die Duplikatorin das Spiel  $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m)$  gewinnt. Die Annahme, dass  $\mathcal{K}$  elementar axiomatisierbar ist, also  $\mathcal{K} = \text{Mod}(\psi)$  für ein  $\psi \in \text{FO}(\tau)$ , führt nun sofort auf einen Widerspruch: Sei  $m = \text{qr}(\psi)$ . Nach dem Satz von Ehrenfeucht und Fraïssé ist  $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$ . Also  $\mathfrak{A}_m \models \psi$  genau dann, wenn  $\mathfrak{B}_m \models \psi$ . Dies ist aber unmöglich, da  $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$  und  $\mathfrak{B}_m \notin \mathcal{K}$ .

*Beispiel 3.24.* Sei  $\tau = \emptyset$  und  $\mathcal{K}_\infty$  die Klasse aller unendlichen  $\tau$ -Strukturen, d.h. aller unendlichen Mengen. Wir haben gesehen, dass  $\mathcal{K}$  durch eine unendliche Satzmenge  $\Phi_\infty$  axiomatisiert wird. Mit der Ehrenfeucht-Fraïssé-Methode können wir nun zeigen, dass  $\mathcal{K}_\infty$  *nicht* endlich axiomatisierbar ist.

Für alle  $m \in \mathbb{N}$  setze  $\mathfrak{A}_m = \mathbb{N}$  und  $\mathfrak{B}_m = \{1, \dots, m\}$ . Dann gewinnt die Duplikatorin das Spiel  $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m)$ , weil jede injektive Funktion, die nur auf  $m$  Elementen definiert ist, ein partieller Isomorphismus ist, sie also nur Gleichheiten und Ungleichheiten erhalten muss. Also trennt kein Satz  $\psi \in \text{FO}(\emptyset)$  die endlichen von den unendlichen Mengen.

**TRANSITIVE HÜLLEN SIND NICHT FO-DEFINIERBAR.** Eine fundamentale Einschränkung der Ausdrucksstärke von FO ist das Fehlen ei-

nes Rekursionsmechanismus. Eigenschaften, welche Rekursion (oder unbeschränkte Iteration) erfordern, sind im Allgemeinen nicht FO-definierbar. Wir illustrieren dies am Beispiel der transitiven Hülle.

**Satz 3.25.** Sei  $\tau = \{E\}$  (die Signatur von Graphen). Es existiert *keine* Formel  $\varphi(x, y) \in \text{FO}(\tau)$ , welche in jeder  $\tau$ -Struktur  $\mathfrak{A} = (A, E)$  die transitive Hülle von  $E$  definiert, d.h. für die gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi(a, b) \text{ gdw. es gibt in } \mathfrak{A} \text{ einen } E\text{-Pfad von } a \text{ nach } b \\ \text{gdw. es gibt } n > 0 \text{ und } c_0, \dots, c_n \in A \text{ mit } c_0 = a, \\ c_n = b \text{ und } (c_i, c_{i+1}) \in E \text{ für alle } i < n. \end{aligned}$$

Satz 3.25 folgt unmittelbar aus dem folgenden Satz, den wir mit der Ehrenfeucht-Fraïssé-Methode beweisen.

**Satz 3.26.** Es gibt keinen Satz  $\psi \in \text{FO}(\tau)$ , so dass für jeden (endlichen, ungerichteten) Graphen  $G = (V, E)$  gilt:

$$G \models \psi \text{ gdw. } G \text{ ist zusammenhängend.}$$

Wenn Satz 3.25 falsch wäre, dann gäbe es eine Formel  $\varphi(x, y)$ , welche in  $G$  ausdrückt, dass ein Pfad von  $x$  nach  $y$  existiert. Aber dann würde  $\psi := \forall x \forall y \varphi(x, y)$  ausdrücken, dass  $G$  zusammenhängend ist.

*Beweis.* Wir definieren für jedes  $m \in \mathbb{N}$  einen zusammenhängenden Graphen  $\mathfrak{A}_m$  und einen nicht zusammenhängenden Graphen  $\mathfrak{B}_m$ , so dass die Duplikatorin das Spiel  $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m)$  gewinnt.

Sei  $\mathfrak{A}_m$  ein Zyklus der Länge  $2^m$  und  $\mathfrak{B}_m$  die disjunkte Vereinigung zweier Kopien von  $\mathfrak{A}_m$  (wie in Abbildung 3.2 illustriert). Es ist zu zeigen, dass die Duplikatorin  $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m)$  gewinnt.

Um die Gewinnstrategie für die Duplikatorin zu motivieren, betrachten wir zunächst eine Gewinnstrategie für den Herausforderer im Spiel mit  $m + 1$  Zügen. Dabei wählt der Herausforderer zunächst Elemente  $b_1, b_2$ , die in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von  $\mathfrak{B}_m$  liegen. Da  $\mathfrak{A}_m$  nur eine Zusammenhangskomponente hat, muss die Duplikatorin zwei Elemente  $a_1, a_2$  von  $\mathfrak{A}_m$  wählen, die durch einen Pfad der Länge höchstens  $2^{m-1}$  verbunden sind. In den folgenden  $m - 1$

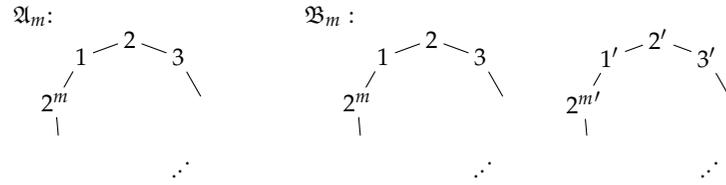


Abbildung 3.2. Die Strukturen  $\mathfrak{A}_m$  und  $\mathfrak{B}_m$ .

Zügen weist der Herausforderer die Existenz dieses Pfades nach, indem er die Distanz zwischen je zwei bereits gewählten Knoten in jedem Zug halbiert. In Abbildung 3.3 sind die Züge des Herausforderers für  $m = 4$  eingezeichnet, für den Fall, dass die Duplikatorin  $b_3$  in derselben Zusammenhangskomponente wie  $b_2$  wählt. Dann kann sie im letzten Zug kein Element  $b_5$  wählen, das eine Kante zu  $b_1$  und  $b_4$  hat.

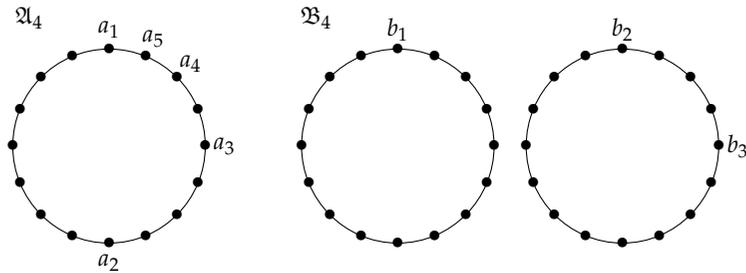


Abbildung 3.3. Eine Gewinnstrategie für den Herausforderer im Spiel  $\mathcal{G}_5(\mathfrak{A}_4, \mathfrak{B}_4)$ .

Wir zeigen, dass der Herausforderer die Existenz eines solchen Pfades in  $\mathfrak{A}_m$  nicht in  $m$  Zügen nachweisen kann, wenn die Duplikatorin in  $\mathfrak{A}_m$  zwei Knoten mit hinreichend großem Abstand wählt.

Um diese Idee zu formalisieren, definieren wir zunächst die Distanz zwischen zwei Knoten sowie einen Begriff dafür, in welchen Fällen wir Distanzen als nicht unterscheidbar betrachten.

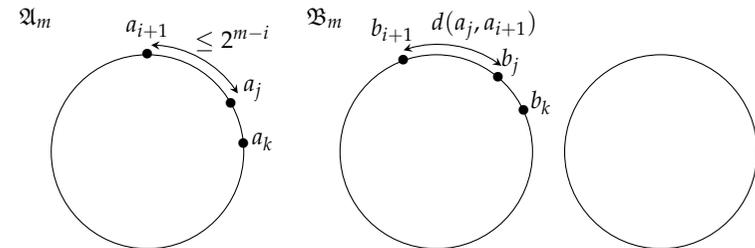
Für je zwei Knoten  $x, y$  sei die Distanz  $d(x, y)$  die Länge eines kürzesten Pfades von  $x$  nach  $y$ , wenn ein solcher existiert, und  $d(x, y) =$

$\infty$ , wenn kein solcher Pfad existiert. Für Zahlen  $u, v \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  und  $n \in \mathbb{N}$  schreiben wir  $u =_n v$ , wenn  $u = v$  oder  $u, v \geq n$ .

*Behauptung.* Die Duplikatorin kann so spielen, dass für alle  $i \leq m$  und alle nach  $i$  Zügen ausgewählten Elemente  $a_1, \dots, a_i \in \mathfrak{A}_m$  und  $b_1, \dots, b_i \in \mathfrak{B}_m$  gilt:  $d(a_j, a_k) =_{2^{m-i+1}} d(b_j, b_k)$ .

Für  $i = 0, 1$  ist dies trivial. Wir nehmen an, die Behauptung sei nach  $i$  Schritten erfüllt und behandeln den Induktionsschritt durch Fallunterscheidung.<sup>4</sup> Aus Symmetriegründen können wir annehmen, dass der Herausforderer im  $(i + 1)$ -ten Zug ein Element  $a_{i+1} \in \mathfrak{A}_m$  auswählt. Sei  $a_j$  das am nächsten bei  $a_{i+1}$  liegende unter den bereits ausgewählten Elementen von  $\mathfrak{A}_m$ , d.h.  $d(a_j, a_{i+1}) \leq d(a_k, a_{i+1})$  für alle  $k \leq i$ .

- (a) Sei  $d(a_j, a_{i+1}) < 2^{m-i}$ . Dann wählt die Duplikatorin  $b_{i+1}$  so, dass  $d(b_j, b_{i+1}) = d(a_j, a_{i+1})$ .



Da  $d(a_j, a_k) =_{2^{m-i}} d(b_j, b_k)$ , schließen wir:

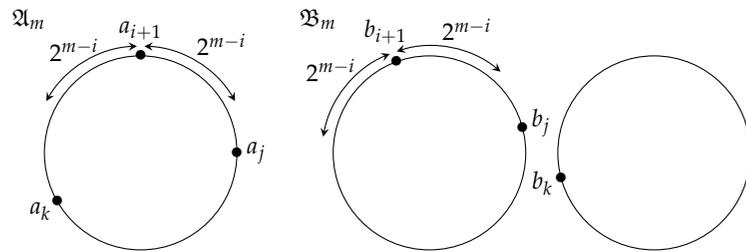
- Wenn  $d(a_j, a_k) = d(b_j, b_k)$ , dann auch  $d(a_{i+1}, a_k) = d(b_{i+1}, b_k)$ ;
- Wenn  $d(a_{i+1}, a_k) \geq 2^{m-i+1}$  und  $d(b_{i+1}, b_k) \geq 2^{m-i+1}$ , dann gilt  $d(a_{i+1}, a_k) \geq 2^{m-i+1}/2 = 2^{m-i}$  und analog  $d(b_{i+1}, b_k) \geq 2^{m-i}$ .

Also gilt  $d(a_{i+1}, a_j) = d(b_{i+1}, b_j)$  und  $d(a_{i+1}, a_k) =_{2^{m-i}} d(b_{i+1}, b_k)$ .

- (b) Sei  $d(a_{i+1}, a_j) \geq 2^{m-i}$ . Die Duplikatorin wählt  $b_{i+1}$  so, dass  $d(b_{i+1}, b_k) \geq 2^{m-i}$  für alle  $k \leq i$ .

<sup>4</sup>Dabei werden hier nur die wichtigsten Fälle betrachtet. Für alle weiteren Fälle verläuft der Beweis analog.

3 Definierbarkeit in der Prädikatenlogik



Am Ende des Spiels (nach  $m$  Zügen) gilt also  $d(a_j, a_k) =_2 d(b_j, b_k)$  für alle  $j, k \leq m$ , d.h.:

$$a_j = a_k \text{ gdw. } b_j = b_k \text{ und} \\ (a_j, a_k) \in E \text{ gdw. } (b_j, b_k) \in E.$$

Also ist die Abbildung  $a_1 \mapsto b_1, \dots, a_m \mapsto b_m$  ein lokaler Isomorphismus von  $\mathfrak{A}_m$  nach  $\mathfrak{B}_m$ , d.h. die Duplikatorin gewinnt  $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m)$ . Q.E.D.