Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2017

1. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 26.04., um 18:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1 ganz viele Punkte

Drucken Sie sich das Skript zu Kapitel 1 der Vorlesung, das Sie auf der Webseite finden, aus, oder sorgen Sie auf andere Art und Weise dafür, dass Sie beim Bearbeiten der Aufgaben Skript oder Mitschrift benutzen.

Aufgabe 2 13 Punkte

Diese Aufgabe ist online im L2P-Lernraum[1] der Veranstaltung unter „eTests“ zu absolvieren. Um Zugriff auf den Lernraum zu erhalten, melden Sie sich in Campus Office zum Tutorium an. Falls Sie sich aufgrund Ihres Studiengangs (z.B. Master Informatik Auflage) nicht über das modulare Anmeldeverfahren zur Vorlesung anmelden können, schreiben Sie eine E-Mail an schalthoefer@logic.rwth-aachen.de.

Aufgabe 3 1 + 4 + 3 Punkte

Marion und Lothar haben einige Freunde zum Essen eingeladen und folgende Rückmeldungen erhalten:

(i) Wenn Antonia nicht kommt, möchte auch Benjamin nicht kommen.

(ii) Mindestens einer der Zwillinge Claudius und Desirée kommt;

(iii) Entweder kommt Antonia oder Emil, aber nicht beide;

(iv) Entweder kommen Emil und Desirée oder beide nicht;

(v) Wenn Claudius kommt, dann kommen auch Desirée und Benjamin.

Finden Sie durch geeignete Formalisierung in der Aussagenlogik heraus, wer zum Abendessen kommt und wer nicht. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Definieren Sie eine geeignete Variablenmenge und deren intendierte Semantik. Unterscheiden Sie durch Ihre Notation explizit zwischen Syntax und Semantik.

(b) Formalisieren Sie die Bedingungen in der Aussagenlogik.

(c) Ermitteln Sie die Modelle Ihrer Formel. Argumentieren Sie dabei semantisch, d.h. mit Hilfe von Interpretation (insbesondere nicht über Wahrheitstabellen) und folgern Sie, wer zum Essen kommt.

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss17/17ss-19269/

Aufgabe 4 1 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte

(a) Geben Sie an, ob folgende Formeln Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar sind. Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der Semantik der Aussagenlogik (benutzen Sie insbesondere keine Wahrheitstabellen).

   (i) $(X \rightarrow 1) \rightarrow (0 \rightarrow Y)$

   (ii) $(1 \rightarrow (X \vee Y)) \wedge (0 \rightarrow (\neg X \wedge \neg Y))$

   (iii) $\neg(Y \rightarrow X) \wedge (\neg X \rightarrow (X \wedge Y))$

(b) Zeigen Sie durch Äquivalenzumformungen, dass folgende Formeln logisch äquivalent sind.

   (i) $(Y \rightarrow X) \wedge ((X \vee Z) \rightarrow Y)$ und $(Y \vee X \vee Z) \rightarrow (X \wedge Y)$

   (ii) $(X \wedge Z) \vee ((X \wedge Z) \wedge ((Y \vee \neg Z) \rightarrow U))$ und $((\neg Y \wedge Z) \vee U \vee (X \wedge Z)) \wedge X \wedge Z$

Aufgabe 5 2 + 2 + 3 + 3 Punkte

(a) Nach Vorlesung bezeichnet die Schreibweise $\bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi$ ($\bigvee_{\varphi \in \Phi}$) die Konjunktion (Disjunktion) aller Formeln in Φ. (So kann z.B. die Formel $X_1 \wedge X_3 \wedge X_5$ geschrieben werden als $\bigwedge_{1 \leq i \leq 5 \text{ und } i \text{ ungerade}} X_i$.) Begründen Sie kurz, warum dies nur für endliche Formelmengen Φ möglich ist.

(b) In einer Menge $\{1, \ldots, n\}$ von Studierenden haben je zwei eine Präferenz, ob sie bereit sind, in einer Lerngruppe zusammenzuarbeiten.

   Solchen Präferenzen P ordnen wir eine Interpretation $\mathfrak{I}_P$ in folgender Weise zu: Für jedes Paar i, j von Studierenden mit $i < j$ (um Dopplungen zu vermeiden) bezeichne $X_{i,j}$ eine Variable und es sei $\mathfrak{I}_P(X_{i,j}) = 1$ genau dann, wenn i und j zusammenarbeiten möchten.

   Drücken Sie die folgenden Sachverhalte in Aussagenlogik aus:

   (i) Unter den Studierenden $\{1, \ldots, 4\}$ gibt es mindestens zwei, die zusammenarbeiten möchten.

   (ii) Konstruieren Sie für jedes n eine Formel φ_n, die von $\mathfrak{I}_P$ genau dann erfüllt wird, wenn es zu jeder Person eine weitere Person gibt, mit der diese nicht zusammenarbeiten möchte.

   (iii) Konstruieren Sie für jedes n eine Formel φ_n, die von $\mathfrak{I}_P$ genau dann erfüllt wird, wenn P eine Zuordnung zu Lerngruppen von je 2 Studierenden erlaubt, sodass alle Studierenden genau einer Lerngruppe zugeordnet sind, und die Mitglieder jeder Lerngruppe zusammenarbeiten möchten.

Aufgabe 6* 5*+5* Punkte

Sei $\psi \rightarrow \varphi$ eine aussagenlogische Tautologie. Wir nennen ϑ eine *Interpolante* für $\psi \rightarrow \varphi$, wenn $\psi \rightarrow \vartheta$ und $\vartheta \rightarrow \varphi$ Tautologien sind und $\tau(\vartheta) \subseteq \tau(\psi) \cap \tau(\varphi)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\psi(\psi(1, Y), Y)$ eine Interpolante für $\psi(X, Y) \rightarrow \varphi(Y, Z)$ ist. Hierbei bezeichnet $\psi(\vartheta, Y)$ die Formel, die aus $\psi(X, Y)$ durch Ersetzen jedes Vorkommens von X durch die Formel ϑ entsteht.

(b) Zeigen Sie per Induktion über die Anzahl der Aussagenvariablen, die in ψ aber nicht in φ vorkommen, dass zu jeder Tautologie $\psi \rightarrow \varphi$ eine Interpolante existiert (*aussagenlogisches Interpolationstheorem*).