Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2017

3. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 10.05., um 18:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 12 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 2 (1+2+2)+3 Punkte

(a) Seien Φ, Ψ Mengen von AL-Formeln, und seien φ, ψ AL-Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) $\varphi \to \psi \models \varphi$

(ii) $\Phi \models \psi$ genau dann, wenn $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar.

(iii) Wenn $\Phi \models \psi$ für alle $\psi \in \Psi$ und $\Psi \models \varphi$, dann auch $\Phi \models \varphi$.

(b) Beweisen Sie mit der Resolutionsmethode, dass die folgende Folgerungsbeziehung gilt:

$$\{Y \lor \neg Z \lor Q, \neg Y \lor \neg Z, U \lor Y \lor \neg Q, U \lor X, \neg X \lor Y \lor \neg Z\} \models Z \to (U \land Q)$$

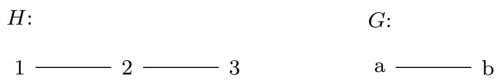
Aufgabe 3 5 Punkte

Betrachten Sie Klauselmengen mit höchstens zwei Literalen in jeder Klausel. Zeigen Sie, dass man mit der Resolutionsmethode effizient entscheiden kann, ob solche Klauselmengen erfüllbar sind. Geben Sie eine obere Schranke für die Anzahl der Resolutionsschritte an, die der Resolutionsalgorithmus auf solchen Klauselmengen braucht. Geht das auch für Klauselmengen mit höchstens drei Literalen pro Klausel?

Aufgabe 4 1+7 Punkte

Ein Graph $G = (V, E)$ ist homomorph zu einem Graphen $H = (V', E')$, wenn es eine Funktion $f : V \to V'$ gibt, so dass für jede Kanten $(u, v) \in E$ in G bereits $(f(u), f(v)) \in E'$ eine Kante in H ist.

(a) Seien G und H wie unten angegeben. Geben Sie eine Funktion $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}$ an, die zeigt dass H zu G homomorph ist.



(b) Sei H ein endlicher Graph. Zeigen Sie, dass G genau dann homomorph zu H ist, wenn jeder endliche Untergraph von G homomorph zu H ist.

Aufgabe 5 7 Punkte

Zeigen Sie, dass man die Teilmengen von $\mathbb{N}$ so in „große“ und „kleine“ Mengen einteilen kann, dass gilt:

(1) Jede Teilmenge $u \subseteq \mathbb{N}$ ist entweder groß oder klein, aber nicht beides.

(2) Eine Menge ist genau dann groß, wenn ihr Komplement klein ist.

(3) Teilmengen von kleinen Mengen sind auch klein.

(4) Die Vereinigung zweier kleiner Mengen ist ebenfalls klein.

(5) Alle endlichen Mengen sind klein.

Hinweis: Ordnen Sie jeder Menge $u \subseteq \mathbb{N}$ eine Aussagenvariable X_u zu, mit der intendierten Interpretation, dass X_u wahr sein soll wenn u groß ist. Formalisieren Sie die Bedingungen (1) - (5) und benutzen Sie den Kompaktheitssatz, sowie die Beobachtung, dass man, wenn man Bedingung (5) weglässt, die anderen Bedingungen dadurch erfüllen kann, dass man eine feste Zahl $n \in \mathbb{N}$ wählt und genau die Mengen als groß definiert, die n enthalten.