Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2017

5. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 24.05., um 18:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 2 1 + 3 + 3 Punkte

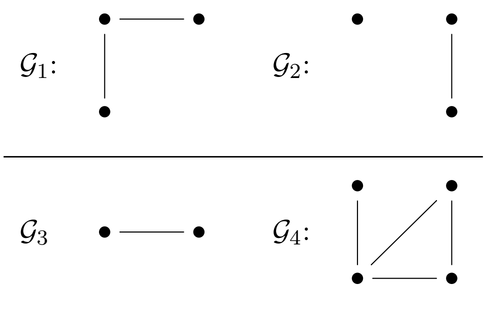
(a) Geben Sie alle Redukte der Struktur $(\mathbb{N}, +, \cdot, <)$ an.

(b) Geben Sie für die Strukturen $\mathfrak{N}_1 = (\mathbb{N}, \leq)$ und $\mathfrak{N}_2 = (\mathbb{N}, f)$ jeweils alle Substrukturen an, wobei $\leq^{\mathfrak{N}_1}$ die übliche Ordnung ist, und $f^{\mathfrak{N}_2}(n) = 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Geben Sie alle Substrukturen der Strukturen $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ sowie $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ (mit Addition modulo 3 bzw. 4) an.

Aufgabe 3 1 + 2 + 2 Punkte

Wir betrachten folgende Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$:



Geben Sie für jeden der folgenden Sätze mit kurzer Begründung an, in welchen der obigen Graphen er gilt.

(a) $\exists x \forall y \neg Eyx$

(b) $\exists x \exists y \exists z (y \neq z \land Exy \land Exz)$

(c) $\forall x \forall y (x \neq y \to (Exy \lor \exists z (Exy \land Exz)))$

Aufgabe 4 1+1+1+2+3 Punkte

Die Arithmetik ist die τ_{ar}-Struktur $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ (mit der natürlichen Interpretation von $+, \cdot, 0$ und 1). Geben Sie jeweils eine Formel $\varphi(x, y) \in \mathrm{FO}(\tau_{ar})$ an, so dass $\mathfrak{N} \models \varphi(a, b)$ gdw. das Paar $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) a teilt b;

(b) a ist eine Primzahl;

(c) a und b sind teilerfremd;

(d) a ist eine Zweierpotenz;

(e) Die Binärdarstellungen von a und b haben die gleiche Länge.

Aufgabe 5 3+3 Punkte

(a) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Strukturen über dem Universum A bzw. B, sodass $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Zeigen Sie per Induktion über den Termaufbau: Für jeden Term t und jede Belegung $\beta : \mathrm{var}(t) \mapsto A$ gilt

$$[\![t]\!]^{(\mathfrak{A},\beta)} = [\![t]\!]^{(\mathfrak{B},\beta)} \quad .$$

(b) Sei τ eine Signatur und sei $\mathfrak{B}$ eine τ-Struktur. Beweisen Sie, dass für jede quantorenfreie Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ und alle Substrukturen $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ für alle $a_1, \ldots, a_k$ aus dem Universum von $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k) \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k) \quad .$$

Folgern Sie, dass alle Substrukturen von $\mathfrak{B}$ die gleichen quantorenfreien Sätze erfüllen.