Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2017

7. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 14.06., um 18:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 — 8 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 2 — 2+2 Punkte

(a) Berechnen Sie eine Skolem-Normalform zur folgenden Formel:

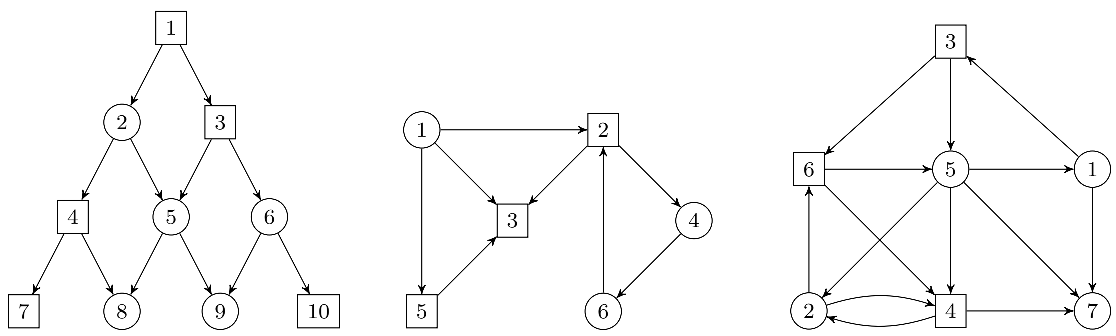
$$\forall x \exists y Rxy \land (\neg Pz \lor \exists x \neg Rxy)$$

(b) Seien φ, ψ FO-Formeln, sodass die Variablen y, z nicht in φ vorkommen, und x nicht in ψ vorkommt. Benutzen Sie die Äquivalenzen aus Lemma 2.20 im Skript, um nachzuweisen, dass die folgende Äquivalenz gilt:

$$\forall x \exists y \forall z(\varphi \land \psi) \equiv \exists y \forall x \forall z(\varphi \land \psi)$$

Aufgabe 3 — 3+3+4 Punkte

Wir betrachten folgende Spielgraphen (eingekreiste Knoten gehören Spieler 0, also rechteckige Knoten Spieler 1).



$\mathcal{G}_1$ $\qquad$ $\mathcal{G}_2$ $\qquad$ $\mathcal{G}_3$

(a) Berechnen Sie (ohne Angabe von Zwischenschritten) die Gewinnregionen W_0 und W_1 von Spieler 0 und Spieler 1 in $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$.

(b) Sind die Spiele $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ fundiert? Sind sie determiniert? Begründen Sie Ihre Antwort.

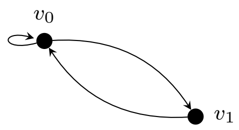
(Erinnerung: Ein Spiel heißt *fundiert*, wenn jede mögliche Partie endlich ist.)

(c) Beweisen Sie, dass jedes fundierte Spiel determiniert ist.

Aufgabe 4 2 + 6 Punkte

(a) Geben Sie eine FO[E]-Formel an, die in gerichteten Graphen definiert, dass jeder Knoten, der einen Nachfolger hat, auch einen Nachfolger mit einer Selbstschleife hat.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie mithilfe des Model-Checking-Spiels, dass Ihre Formel im unten angegebenen Graphen mit Universum $\{v_0, v_1\}$ gilt. Konstruieren Sie dazu den Spielgraphen und geben Sie eine Gewinnstrategie für die Verifiziererin oder den Falsifizierer an.



Aufgabe 5 (2 + 4) + 4 Punkte

(a) Sei $G = (V, V_0, V_1, E)$ ein Spielgraph. Zeigen Sie durch Angabe geeigneter FO-Formeln, dass die folgenden Relationen elementar definierbar sind:

(i) $\{v$: Jede Partie, die in v beginnt, endet in höchstens 2 Schritten$\}$

(ii) $\{(v, w)$: Spieler 0 kann von v aus erzwingen, dass in höchstens n Schritten w erreicht wird$\}$ (für festes n)

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $G = (V, V_0, V_1, E)$ ein Spielgraph der Größe n. Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten FO-Formel, dass die folgende Relation elementar definierbar ist:
$\{v$: Spieler 0 hat von v aus keine Gewinnstrategie, kann aber eine unendliche Partie erzwingen.$\}$

Erläutern Sie jede Ihrer Formeln kurz.