Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2017

8. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 21.06., um 18:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1 8 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2) + 3 + 1 Punkte

Eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$ heißt *starr*, wenn sie nur den trivialen Automorphismus besitzt, d.h. wenn für alle Automorphismem $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ gilt, dass $\pi(a) = a$ für alle $a \in A$.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Strukturen starr sind.
- $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$;
- $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +1)$ (hierbei bezeichne $+1$ die Nachfolgerfunktion auf $\mathbb{N}$);
- $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, <, P, Q)$, wobei $P = 2\mathbb{Z}$ und $Q = 3\mathbb{Z}$;

(b) Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur in der jedes Element elementar definierbar ist, d.h. für alle $a \in A$ ist die Menge $\{a\}$ in $\mathfrak{A}$ durch eine Formel $\varphi_a(x)$ definierbar. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}$ starr ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer unendlichen Struktur mit der Eigenschaft aus (b) an.

Aufgabe 3 2 + 3 + 2 Punkte

Sei $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \cdot)$ und $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der Primzahlen. Eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ nennen wir *Primzahlpermutation.*

(a) Sei $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ein Automorphismus der Struktur $\mathfrak{N}$. Zeigen Sie, dass $\pi \upharpoonright \mathbb{P}$ eine Primzahlpermutation ist.

(b) Sei nun $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ eine Primzahlpermutation. Zeigen Sie, dass es genau einen Automorphismus $\pi_f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ von $\mathfrak{N}$ gibt, sodass $\pi_f \upharpoonright \mathbb{P} = f$.

(c) Aus Aufgabenteil (a) und (b) folgt, dass die Automorphismen von $\mathfrak{N}$ genau die durch Primzahlpermutationen induzierten Automorphismen sind. Folgern Sie mit Hilfe des Isomorphielemmas, dass dies auch eine Charakterisierung für die Automorphismen der Struktur $\mathfrak{M} = (\mathbb{N}, \cdot, |)$ liefert, wobei $|$ die Teilbarkeitsbeziehung in $\mathbb{N}$ sei.

Aufgabe 4 $1 + 2^{\star} + 3 + 3 + 3 + 3$ Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie für die folgenden Relationen jeweils, dass Sie in der jeweiligen Struktur elementar definierbar sind:

(a) Die Konstante 1 in $(\mathbb{Q}, \cdot)$

(b) Die Menge $\mathbb{Q}_{\geq 1}$ in $(\mathbb{Q}, \cdot)$

(c) Die Relation $\{(m, n) : n = 5m\}$ in $(\mathbb{N}, \cdot)$

(d) Die Menge der Primpotenzen in $(\mathbb{N}, \cdot)$

(e) Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$ in $(\mathbb{C}, +)$

(f) Die Menge $\{0, 1\}$ in $(\{0, 1\}^*, \preceq)$. Dabei bezeichne $\{0, 1\}^*$ die Menge der endlichen Wörter über $\{0, 1\}$ und $\preceq$ bezeichne die Präfix-Relation, d.h. $x \preceq y$ gdw. $xz = y$ für ein $z \in \{0, 1\}^*$.

Aufgabe 5* $((2 + 2) + 5 + 2)^*$ Punkte

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Strukturen. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ heißt *elementare Substruktur* von $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$), falls für jede Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{FO}(\tau)$ und alle $a_1, \ldots, a_k \in A$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k) \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k).$$

Im folgenden seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ τ-Strukturen über den Universen A, B, C.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die folgenden Aussagen:

(i) Wenn $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \preceq \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$, dann $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

(ii) Wenn $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, dann $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

(b) Beweisen Sie: Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Dann gilt $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ genau dann, wenn für jede $\mathrm{FO}(\tau)$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$ und alle $a_1, \ldots, a_k \in A$ gilt: Wenn $\mathfrak{B} \models \exists y \varphi(a_1, \ldots, a_k, y)$, dann gilt bereits $\mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k, a)$ für ein $a \in A$.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 5 von Übung 5.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn für alle $a_1, \ldots, a_k \in A$ und $b \in B$ ein Automorphismus existiert, der $a_1, \ldots, a_k$ festhält und b auf ein Element von A abbildet, dann $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

Hinweis: Benutzen Sie einen der vorherigen Aufgabenteile.