Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2017

9. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 28.06., um 18:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 14 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 2 2 + 2 + 3 Punkte

Betrachten Sie folgende relationale Strukturen. Bestimmen Sie jeweils die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$ oder beweisen Sie, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Geben Sie im ersten Fall eine Formel vom Quantorenrang m an, welche die Strukturen trennt, sowie Gewinnstrategien für Herausforderer bzw. Duplikatorin in den Spielen $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(a) $\mathfrak{A} := (\mathbb{Q}, P)$ mit $P^{\mathfrak{A}} = \mathbb{Q}_{\geq 0}$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, P)$ mit $P^{\mathfrak{B}} = \mathbb{R}_{<0}$;

(b) $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, P, Q)$ mit $P^{\mathfrak{A}} = 2\mathbb{Z}$ und $Q^{\mathfrak{A}} = 3\mathbb{Z}$, und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, P, Q)$ mit $P^{\mathfrak{B}} = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ und $Q^{\mathfrak{B}} = \{3^n : n \in \mathbb{N}\})$;

(c) $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, M, 1)$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{Q}, M, 1)$, wobei M der Graph der Multiplikation ist, also $M = \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 : a \cdot b = c\}$, und 1 die Relation, die genau die 1 enthält.

Aufgabe 3 (1 + 1 + 1 + 2) + (1 + 5) Punkte

(a) Welche der folgenden Theorien sind vollständig? (Erinnerung: Eine Theorie T heißt *vollständig*, wenn für alle Sätze $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ gilt $\psi \in T$, oder $\neg\psi \in T$.)
   (i) Die Theorie von $(\mathbb{R}, +, \leq)$;
   (ii) die Theorie der Klasse aller zu $(\mathbb{N}, \cdot)$ elementar äquivalenten Strukturen;
   (iii) die Theorie der Wortstrukturen für Wörter der Länge genau 5 über dem Alphabet $\{a, b\}$;
   (iv) die Theorie der Graphen ohne Kanten mit überabzählbar vielen Knoten.

(b) Eine lineare Ordnung ist diskret, wenn jedes Element a, das Nachfolger (Vorgänger) hat, auch einen kleinsten (größten) Vorgänger (Nachfolger) b hat, d.h. für kein c gilt $a < c < b$ $(b < c < a)$.
   (i) Geben Sie zwei diskrete lineare Ordnungen ohne Endpunkte an, die nicht isomorph sind.
   (ii) Beweisen Sie, dass die Theorie der diskreten linearen Ordnungen ohne Endpunkte vollständig ist.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Ehrenfeucht und Fraïssé.

Aufgabe 4 4 + 4 Punkte

(a) Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Menge von Sätzen über einer relationalen Signatur τ, $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ die durch Φ axiomatisierte Klasse von Strukturen, und sei $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur. Wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $\mathcal{A}_m \in \mathcal{K}$ existiert mit $\mathcal{B} \equiv_m \mathcal{A}_m$, dann gilt $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes aus (a), dass die Klasse der Graphen, in denen jeder Knoten bis auf endlich viele zu allen Knoten adjazent ist, nicht axiomatisierbar ist.