Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Wilke

SS 2017

10. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 05.07. um 18:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum.

Aufgabe 2

1+5 Punkte

In der 5ten Gruppenübung haben wir zu einem endlichen Wort $w = w_1 \dots w_n \in \{a,b\}^*$ die Wortstruktur $\mathfrak{w} := (\{0,\dots,n-1\}, <, P_a, P_b)$ über der Signatur $\tau = \{<, P_a, P_b\}$ definiert. Ein $\mathsf{FO}(\tau)$-Satz φ definiert damit die Sprache $\mathrm{L}(\varphi) := \{w \in \{a,b\}^+ \ : \ \mathfrak{w} \models \varphi\}$.

(a) Geben Sie einen $\mathsf{FO}(\tau)$-Satz φ an mit $\mathrm{L}(\varphi) = \mathrm{L}((ab)^*) \setminus \{\varepsilon\}$.

(b) Nutzen Sie die Methode von Ehrenfeucht und Fräissé, um zu zeigen, dass es eine reguläre Sprache L gibt mit $L \setminus \{\varepsilon\} \neq \mathrm{L}(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathsf{FO}(\tau)$.

(Beachten Sie, dass wir Strukturen so definiert haben dass sie ein nichtleeres Universum haben, weshalb wir das leere Wort ε herausnehmen müssen.)

Aufgabe 3

6 + 4 + (2 + 2) Punkte

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls der Prädikatenlogik, dass es keine Menge gibt, die genau die Mengen enthält, die sich nicht selbst enthalten. Finden sie dafür zunächst eine geeignete Formalisierung der Aussage.

(b) Beweisen Sie die Korrektheit der Schlussregel $(\Rightarrow \forall)$ und zeigen Sie, dass man bei den Regeln $(\exists \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \forall)$ die Bedingung, dass c nicht in Γ, Δ und ψ vorkommt nicht weglassen kann.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit folgender Schlussregeln

(i) $$\frac{\Gamma, \forall x \varphi(x) \ \Rightarrow \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi(x) \ \Rightarrow \ \Delta}$$

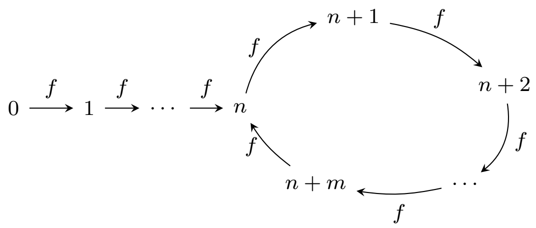
(ii) $$\frac{\Gamma, \exists x \varphi(x) \ \Rightarrow \ \Delta, \forall x \psi(x)}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \ \Rightarrow \ \Delta, \exists x \psi(x)}$$

Aufgabe 4 8 + 2 Punkte

Sei $\tau = \{a, f\}$ für ein Konstantensymbol a und eine einstellige Funktion f.

(a) Beweisen Sie, dass für jede Menge von atomaren Formeln $\varnothing \neq T \subseteq \{f^n a = f^m a \;:\; n \neq m \in \mathbb{N}\}$ über τ das kanonische Modell $\mathfrak{H}(\Sigma)_{/\sim}$ isomorph zu einer Struktur $\mathfrak{A}_{k,\ell}$ für $k, \ell \in \mathbb{N}$ ist. Dabei bezeichnet $f^0 a := a$, Σ die kleinste Menge, die sowohl T enthält, als auch unter Substitution abgeschlossen ist und $\mathfrak{A}_{n,m} := (\{0, 1, \dots, n+m\}, a, f)$ wobei a als 0 interpretiert wird und $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < n+m \\ n, & \text{sonst} \end{cases}$

Die Struktur $\mathfrak{A}_{n,m}$ sieht wie folgt aus:



Beachte dass im Sonderfall $m = 0$ eine Kante von n zu sich selbst besteht.

Hinweis: Sie müssen k und ℓ nicht konkret angeben sondern nur zeigen, dass es ein solches $\mathfrak{A}_{k,\ell}$ gibt.

(b) Folgern Sie: Im Bezug auf das kanonische Modell ist jede Menge von atomaren Sätzen T über τ somit äquivalent zu einer einelementigen Menge. Mit anderen Worten: Für jedes T gibt es eine einelementige Menge $\{f^n a = f^m a\}$, so dass die beiden daraus resultierenden kanonischen Modelle gleich sind.