**Lehr- und Forschungsgebiet**
**Mathematische Grundlagen der Informatik**
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2017

# 11. Übung Mathematische Logik

**Abgabe**: bis Mittwoch, den 12.07., um 18:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung. **Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.**

Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

## Aufgabe 1 — 7 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum.

## Aufgabe 2 — 2 + 3 + 3 + 4 Punkte

Sei $\{0,1\}^*$ die Menge der endlichen Wörter über $\{0,1\}$, und sei $\{0,1\}^\omega$ die Menge der unendlichen Wörter über $\{0,1\}$ (wobei jedes Wort einer Zuordnung von natürlichen Zahlen (den Positionen) zu 0 oder 1 entspricht)[1].

Wir betrachten die Strukturen $\mathfrak{A}_1 = (\{0,1\}^*, f_0, f_1)$, $\mathfrak{A}_2 = (\{0,1\}^\omega, f_0, f_1)$ und $\mathfrak{A}_3 = (\mathbb{N}, f_0, f_1)$, wobei $f_0^{\mathfrak{A}_1}$ und $f_1^{\mathfrak{A}_1}$ dem Anhängen einer 0 bzw. 1 am Ende des Wortes entsprechen, $f_0^{\mathfrak{A}_2}$ und $f_1^{\mathfrak{A}_2}$ eine 0 bzw. 1 am Anfang des Wortes anhängen, und $f_0^{\mathfrak{A}_3}$ der Multiplikation mit 3 und $f_1^{\mathfrak{A}_3}$ der Multiplikation mit 2 entspricht.

Ferner definieren wir die Relationen $\sim_{\mathfrak{A}_1}$, $\sim_{\mathfrak{A}_2}$ und $\sim_{\mathfrak{A}_3}$ durch

$$\begin{aligned} v \sim_{\mathfrak{A}_1} w &\text{ gdw. } |v|_1 = |w|_1, \\ \alpha \sim_{\mathfrak{A}_2} \beta &\text{ gdw. } |\alpha|_1 = |\beta|_1, \\ n \sim_{\mathfrak{A}_3} m &\text{ gdw. der Exponent von 2 in der Primfaktorzerlegung von } n \text{ und } m \text{ ist gleich} \\ &\quad\text{oder } n = m = 0, \end{aligned}$$

wobei $|v|_1 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die Anzahl der 1en im Wort $v \in \{0,1\}^* \cup \{0,1\}^\omega$ ist.

(a) Beweisen Sie, dass $\sim_{\mathfrak{A}_1}$ eine Kongruenzrelation ist. Im Folgenden können Sie außerdem ohne Beweis benutzen, dass auch $\sim_{\mathfrak{A}_2}$ und $\sim_{\mathfrak{A}_3}$ Kongruenzrelationen sind.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\sim_{\mathfrak{A}_1}$ auch eine Kongruenzrelation auf der Struktur $(\{0,1\}^*, F_0, F_1)$ ist, wobei die zweistelligen Relationen $F_0$ und $F_1$ die Graphen von $f_0$ bzw. $f_1$ sind.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie für $i, j \in \{1,2,3\}$ jeweils, dass $\mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{A}_j$.

(d) Beweisen oder widerlegen Sie für $i, j \in \{1,2,3\}$ jeweils, dass $\mathfrak{A}_i/{\sim_{\mathfrak{A}_i}} \cong \mathfrak{A}_j/{\sim_{\mathfrak{A}_j}}$.

[1] Wörter in $\{0,1\}^\omega$ sind z.B. 001001001... oder auch die Binärkodierung der Nachkommastellen von $\pi$.

**Aufgabe 3** $(3 + 4) + 3^\star$ Punkte

Im Beweis des Vollständigkeitssatzes wurden im Abschnitt über Hintikka-Mengen nur Mengen von reduzierten Sätzen betrachtet (also Sätze, die aus den Atomen nur mittels $\vee, \neg$ und $\exists$ aufgebaut sind. Welche Abschlusseigenschaften muss ein Paar von Satzmengen $\Gamma^*$, $\Delta^*$ zusätzlich zu den Eigenschaften (1)-(5) aus Lemma 4.16 erfüllen, um zu garantieren, dass $\Gamma^* \cup \neg\Delta^*$ ein Modell besitzt, wenn zusätzlich die Verwendung folgender Operatoren erlaubt wird?

(a) $\wedge$ und $\forall$

(b)$^\star$ $\rightarrow$

Erweitern Sie jeweils den Induktionsschritt im Beweis von Satz 4.18 um die entsprechenden Operatoren.

**Aufgabe 4** 8 Punkte

Sei $(\tau)$ die Klasse aller $\tau$-Strukturen, $\mathcal{K} \subseteq (\tau)$ eine Klasse von $\tau$-Strukturen und $\mathcal{K}^c := \{\mathfrak{A} \in (\tau) \mid \mathfrak{A} \notin \mathcal{K}\}$ ihr Komplement. Beweisen Sie mit dem Kompaktheitssatz, dass $\mathcal{K}$ genau dann endlich axiomatisierbar ist, wenn $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}^c$ beide FO-axiomatisierbar sind.
*Hinweis:* Betrachten Sie die Menge $\Phi_{\mathcal{K}} \cup \Phi_{\mathcal{K}^c}$ für Axiomensysteme $\Phi_{\mathcal{K}}$ von $\mathcal{K}$ und $\Phi_{\mathcal{K}^c}$ von $\mathcal{K}^c$.

**Aufgabe 5** 6 Punkte

Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass die Klasse

$$\{(A, f) : \text{für alle } a \in A \text{ gibt es ein } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ mit } f^n(a) = a\}$$

nicht FO-axiomatisierbar ist.