Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2017

12. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 19.07., um 18:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

8 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum.

Aufgabe 2

2 + 2 + 2 + 2 Punkte

Sei $\tau = \{f\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist. Geben Sie für die durch die folgenden Eigenschaften beschriebenen Klassen von τ-Strukturen ein (wenn möglich endliches) Axiomensystem an oder widerlegen Sie jeweils die Existenz solcher (endlicher) Axiomensysteme.

(a) $f^{-1}(a)$ ist überabzählbar für ein $a \in A$;

(b) f ist die Identitätsabbildung und das Universum ist endlich;

(c) Bild(f) ist endlich;

(d) jedes Element wird von f nur auf abzählbar viele Elemente abgebildet.

Aufgabe 3

3 + 5 + 2 + 5 + 2 Punkte

Sei $\tau = \{E\}$ die Signatur der (gerichteten) Graphen. Geben Sie für folgende Klassen von τ-Strukturen ein (wenn möglich endliches) Axiomensystem an oder widerlegen Sie jeweils die Existenz solcher (endlicher) Axiomensysteme.

(a) Die Klasse aller Graphen, die eine endliche Clique als Teilgraph enthalten.

(b) die Klasse aller Graphen, die für jedes $k \geq 3$ ein Independent Set der Größe mindestens k enthalten;

(c) die Klasse aller Graphen, in denen die größte Clique höchstens 5 Knoten enthält;

(d) die Klasse aller Graphen, in denen der längste Kreis höchstens 5 Knoten enthält;

(e) die Klasse aller Graphen, die für ein $k > 5$ einen Kreis der Länge k enthalten.

Ein Independent Set ist eine Menge von paarweise nicht verbundenen Knoten, eine Clique ist eine Menge von mindestens 3 Knoten, in der jedes Paar von verschiedenen Knoten durch eine (ungerichtete) Kante verbunden ist.

Aufgabe 4 3 + 4 Punkte

(a) Sei $\Phi \subseteq \text{FO}$ ein Fragment von FO (also eine Menge von FO-Formeln), sodass sich für jeden Satz $\varphi \in \Phi$ (algorithmisch) eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ablesen lässt, sodass, falls φ erfüllbar ist, auch ein Modell der Größe n existiert.

Geben Sie einen Algorithmus an, der für jedes solche Fragment von FO das Erfüllbarkeitsproblem entscheidet.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass das Erfüllbarkeitsproblem auch dann noch entscheidbar ist, wenn nur bekannt ist, dass für jeden Satz ein solches n existiert.

Hinweis: Vollständigkeitssatz