Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Wilke

SS 2017

13. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 26.07., um 18:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgaben, die mit einem Stern ⋆ gekennzeichnet sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1

8 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum.

Aufgabe 2

2 + 3 + 4 + 4 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir Transitionssysteme der Form $\mathcal{K} = (V, E, P, Q)$, wobei E die (einzige) Kantenbeziehung ist und $P, Q \subseteq V$ die atomaren Eigenschaften sind. Ist $v \in V$, so nennen wir $w \in V$ einen P-Nachfolger (bzw. Q-Nachfolger) von v, wenn $(v, w) \in E$ und $w \in P$ (bzw. $w \in Q$) gilt.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Eigenschaften von Transitionssystemen mit ausgewählten Knoten v in der Modallogik definierbar sind.

(a) Jeder P-Nachfolger (von v), der irgendeinen Nachfolger hat, hat auch einen Q-Nachfolger.

(b) v liegt auf einem Kreis der Länge 2.

(c) Jeder maximal lange Weg von v, der mindestens Länge 3 hat, hat Länge genau 4.

Hinweis: Auf einem Weg dürfen Wiederholungen von Knoten auftreten.

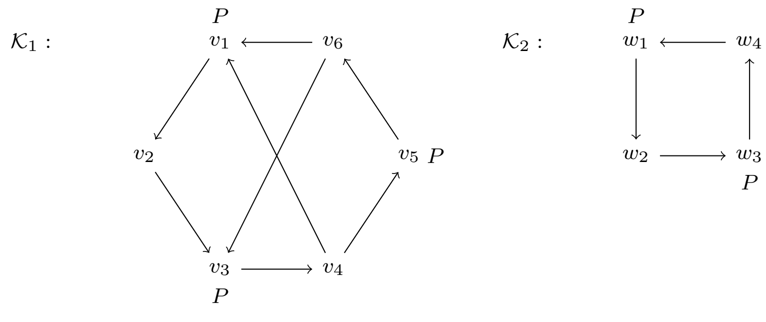
(d) Jeder P-Nachfolger (von v), der einen Q-Nachfolger hat, hat höchstens einen P-Nachfolger.

Aufgabe 3

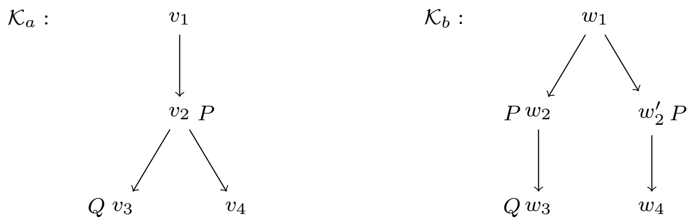
3 + 4 + 2 Punkte

(a) Seien $\mathcal{K} = (V, E, P)$ und $\mathcal{K}' = (V', E', P')$ zwei *endlich verzweigte* Transitionssysteme und $v \in V$ sowie $v' \in V'$ zwei Knoten mit $\mathcal{K}, v \not\sim_n \mathcal{K}', v'$ für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Existenz einer Formel $\psi \in \mathrm{ML}$ mit $\mathrm{md}(\psi) \leq n$ und $\mathcal{K}, v \models \psi$ aber $\mathcal{K}', v' \not\models \psi$.

(b) Betrachten Sie die Kripkestrukturen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$. Geben Sie eine Bisimulation Z an, die zeigt, dass $\mathcal{K}_1, v_1 \sim \mathcal{K}_2, w_1$ gilt.



(c) Gilt auch $\mathcal{K}_a, v_1 \sim \mathcal{K}_b, w_1$? Geben Sie eine Bisimulation Z mit $(v_1, w_1) \in Z$ an, oder beweisen Sie dass es kein solches Z geben kann.



Aufgabe 4 10* Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen, so dass für alle $\varphi \in \mathsf{FO}$ aus $\mathfrak{A} \models \varphi$ bereits $\mathfrak{B} \models \varphi$ folgt. Dann gilt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

(b) Es gibt für jede τ-Struktur $\mathfrak{A}$ eine nicht isomorphe τ-Struktur $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

(c) Sei $\Gamma \Rightarrow \Delta$ eine gültige Sequenz der Aussagenlogik. Dann gibt es zu jedem $\gamma \in \Gamma$ ein $\delta \in \Delta$, so dass $\gamma \Rightarrow \delta$ eine gültige Sequenz ist.

(d) Aus einer beliebigen Horn-Formel φ konstruieren wir die Formel $\psi := (X \to \varphi)$. Damit ist ψ äquivalent zu einer Horn-Formel.

(e) Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Es gibt eine $\mathsf{FO}(\{E\})$-Formel φ, so dass $\mathrm{Mod}(\varphi)$ die Klasse aller k-regulären[1] Graphen ist.

(f) Sei $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ eine Boolsche Funktion mit $f(0,0) = 0$. Die Menge $\{f\}$ ist funktional vollständig.

(g) Wenn die Duplikatorin das Spiel $G_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gewinnt, dann ist $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

(h) Sei $\Delta \subseteq \mathrm{AL}$ und $\varnothing \Rightarrow \Delta$ eine gültige Sequenz. Dann gibt es ein $\delta \in \Delta$ welches eine Tautologie ist.

(i) Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur, so dass es einen nicht-trivialen[2] Automorphismus $\pi : A \to A$ gibt. Es gibt eine nicht elementar definierbare Menge $M \subseteq A$ in $\mathfrak{A}$.

(j) Sei φ ein FO-Satz. Dann ist entweder $\varnothing \Rightarrow \varphi$ oder $\varphi \Rightarrow \varnothing$ im SK ableitbar.

[1] k-regulär bedeutet, dass der Grad jedes Knotens genau k ist, also dass es k ausgehende Kanten gibt.
[2] Das heißt $\pi \neq \mathrm{id}_A$.