Aufgabe 1 $\star$ Punkte

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen zutreffen und geben Sie eine *kurze* Begründung an (etwa, indem Sie ein Gegenbeispiel konstruieren, oder bekannte Ergebnisse aus der Vorlesung/Übung für Ihre Argumentation verwenden).

Achtung: Fehlt eine Begründung, so wird Ihre Lösung mit 0 Punkten bewertet.

(i) Sei $f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ definiert durch $f(x,y,z) = \max(x,z) - \min(x,y)$ eine Boole'sche Funktion. Dann ist $\{f, 0, 1\}$ funktional vollständig.

(ii) Sei φ eine Horn-Formel und ψ eine beliebige AL-Formel mit $\varphi \models \psi$. Dann ist auch ψ äquivalent zu einer Horn-Formel.

(iii) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ eine Menge von AL-Formeln, so dass für jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ eine unendliche Menge $\Phi_1 \supseteq \Phi_0$ existiert, die erfüllbar ist. Dann ist Φ erfüllbar.

(iv) Seien $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{AL}$ zwei Mengen von AL-Formeln, so dass $\Gamma \Rightarrow \Delta$ eine gültige Sequenz ist. Dann gibt es für alle $\gamma \in \Gamma$ ein $\delta \in \Delta$, so dass $\gamma \Rightarrow \delta$ eine gültige Sequenz ist.

(v) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ eine unerfüllbare Menge von AL-Formeln. Dann existiert eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$, so dass $\Phi_0 \Rightarrow \psi$ im Sequenzenkalkül ableitbar ist für alle $\psi \in \Phi$.

(vi) Die Strukturen $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ und $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ sind elementar äquivalent.

(vii) Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen, so dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Dann gilt auch $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

(viii) Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur die einen nicht-trivialen Automorphismus $\pi : A \to A$ besitzt, also $\pi \neq \mathrm{id}_A$. Dann gibt es eine Menge $M \subseteq A$, die in $\mathfrak{A}$ nicht elementar definierbar ist.

(ix) Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen, wobei τ eine endliche relationale Signatur ist. Ist φ ein $\mathrm{FO}(\tau)$-Satz mit $\mathrm{qr}(\varphi) = m \geq 1$ und $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi$, so gewinnt die Duplikatorin das Spiel $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(x) Seien $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur, und φ ein $\mathrm{FO}(\tau)$-Satz. Dann ist der Spielgraph des Auswertungsspiels $\mathrm{MC}(\mathfrak{A}, \varphi)$ endlich.

Aufgabe 2 $\star$ Punkte

(a) Zeigen Sie anhand der Resolutionsmethode, dass die folgende Folgerungsbeziehung gilt:

$$\{U \vee V \vee \neg Y, Y \vee U \vee W, Y \vee \neg V \vee W, W \vee \neg V \vee L, \neg W \vee L, \neg U\} \models \neg(L \to U).$$

(b) Zeigen oder widerlegen Sie für die folgenden Formeln jeweils, dass sie zu einer Horn-Formel äquivalent sind.

(i) $(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee Z)$

(ii) $(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Z) \wedge \neg Y$

(c) Wenden Sie den Markierungsalgorithmus für Horn-Formeln aus der Vorlesung an, um die Gültigkeit der folgenden Folgerungsbeziehung nachzuweisen.

$$\{X \wedge Y \to Z, A \wedge B \to X, Z \wedge C \to A, C \wedge A \to B\} \models (Z \to Y) \vee (C \to X)$$

Aufgabe 3 $\star$ Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Schlussregeln für die Aussagenlogik korrekt sind.

(a) $\dfrac{\Gamma,\ \neg\psi \Rightarrow \Delta,\ \neg\varphi}{\Gamma,\ \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta,\ \psi}$;

(b) $\dfrac{\Gamma,\ \varphi,\ \neg\psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\ (\varphi \to \psi) \to \vartheta \Rightarrow \Delta,\ \vartheta}$;

(c) $\dfrac{\Gamma,\ \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma,\ \vartheta \Rightarrow \Delta,\ \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \varphi \to \psi \wedge \vartheta}$.

Aufgabe 4 $\star$ Punkte

(a) Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot, D, f)$, wobei $+$ und $\cdot$ die komponentenweise Addition bzw. Multiplikation seien. Ferner sei $D = \{(a, a) \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ die Diagonale in der reellen Ebene und f sei eine einstellige Funktion. Konstruieren Sie Formeln $\varphi_1, \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y, z) \in \mathrm{FO}(+, \cdot, D, f)$ mit

(i) $\mathfrak{A} \models \varphi_1$ genau dann, wenn $f(D) = D$.

(ii) $\mathfrak{A} \models \varphi_2(a, b)$ genau dann, wenn $b = (b_1, b_2)$ rechts oberhalb von $a = (a_1, a_2)$ liegt, d.h. $b_1 \geq a_1$ und $b_2 \geq a_2$.

(iii) $\mathfrak{A} \models \varphi_3(a, b, c)$ genau dann, wenn a, b und c auf einer Geraden liegen.

(b) Wir betrachten folgende Strukturen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1 &:= (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, D^{\mathfrak{A}_1}) \ \text{ mit } D^{\mathfrak{A}_1} := \{(a, a) \ : \ a \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \\
\mathfrak{A}_2 &:= (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, D^{\mathfrak{A}_2}) \ \text{ mit } D^{\mathfrak{A}_2} := \{(a, a) \ : \ a \in \mathbb{R}_{\leq 0}\} \\
\mathfrak{A}_3 &:= (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, D^{\mathfrak{A}_3}) \ \text{ mit } D^{\mathfrak{A}_3} := \{(a, a) \ : \ a \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Dabei sei $+$ jeweils die komponentenweise Addition. Beweisen oder widerlegen Sie für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i < j$ jeweils, dass es einen Satz $\varphi_{ij} \in \mathrm{FO}(+, D)$ gibt, mit $\mathfrak{A}_i \models \varphi_{ij}$ und $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_{ij}$.

Aufgabe 5 $\star$ Punkte

Sei $\mathfrak{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \emptyset, U)$, wobei $\emptyset$ die leere Menge sei und U die Menge

$$U = \{M \subseteq \mathbb{N} \ : \ M \text{ hat unendlich viele Elemente}\}\,.$$

Zeigen oder widerlegen Sie für die folgenden Relationen jeweils, dass sie in $\mathfrak{A}$ elementar definierbar sind.

(a) $\{M \subseteq \mathbb{N} \ : \ M \text{ ist endlich}\}$.

(b) $\{Q\}$, wobei Q die Menge aller Quadratzahlen sei.

(c) $\{M \subseteq \mathbb{N} \ : \ M \text{ ist unendlich und } \mathbb{N} \setminus M \text{ ist unendlich}\}$.

Aufgabe 6 $\star$ Punkte

Eine lineare Ordnung $(A, <)$ heißt diskret, wenn jedes Element, welches nicht maximal ist, einen direkten Nachfolger hat und jedes Element, welches nicht minimal ist, einen direkten Vorgänger hat. Zeigen oder widerlegen Sie für die folgenden Klassen von Strukturen jeweils, dass sie FO($<$)-axiomatisierbar beziehungsweise endlich FO($<$)-axiomatisierbar sind.

(a) Die Klasse aller partiellen Ordnungen $(A, <)$, in denen jede Menge von paarweise unvergleichbaren Elementen endlich ist.

(b) Die Klasse aller unendlichen diskreten linearen Ordnungen $(A, <)$ mit größtem und kleinstem Element.

(c) Die Klasse aller linearen Ordnungen $(A, <)$, die weder dicht noch diskret sind.