Aufgabe 1

Betrachten Sie die Boolesche Algebra aller Teilmengen von $\mathbb{N}$:

$$\mathsf{BA}(\mathbb{N}) = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap, \bar{\ }, \emptyset, \mathbb{N}).$$

Welche Substrukturen von $\mathsf{BA}(\mathbb{N})$ werden von den folgenden Teilmengen erzeugt?

(i) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$.

(ii) Die Menge aller unendlichen Intervalle $(n, \infty) = \{k \in \mathbb{N} \mid k > n\}$.

(iii) Die Menge aller unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, deren Komplement unendlich ist.

Aufgabe 2

Wir betrachten endliche Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.
Ein Wort $w = w_0 \cdots w_{n-1}$ entspricht der Struktur

$$\mathfrak{w} := (\{0, \cdots, n-1\}, <, P_a, P_b),$$

wobei $<$ die übliche lineare Ordnung ist, und $i \in P_j$ genau dann gilt, wenn $w_i = j$.
Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils einen $\mathrm{FO}(\{<, P_a, P_b\})$-Satz an, der diese definiert.

(a) $\{w \in \Sigma^* \ : \ w_0 = a$ und $w_{n-1} = b$ wobei $n = |w|\}$

(b) $\{w \in \Sigma^* \ : \ $*abba* kommt als Infix in w vor$\}$

(c) $\{w \in \Sigma^* \ : \ $*ba* kommt *nicht* als Infix in w vor$\}$

(d) $\{w \in \Sigma^* \ : \ $ hinter jedem a in w kommt noch mind. ein $b\}$