Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Wilke

SS 2018

10. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 04.07., um 12:15 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, Erdgeschoss) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 0 4 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum[1].

Aufgabe 1 5 + 5 Punkte

Nutzen Sie den Kompaktheitssatz um die folgenden Aussagen zu beweisen.

(a) Sei $\mathcal{K}$ eine endlich axiomatisierbare Strukturenklasse und Φ ein unendliches Axiomensystem für $\mathcal{K}$. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$, so dass $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Phi_0)$.

(b) Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von τ-Strukturen und $\overline{\mathcal{K}}$ das Komplement von $\mathcal{K}$, also genau alle τ-Strukturen, die nicht in $\mathcal{K}$ sind. Sollte sowohl $\mathcal{K}$, als auch $\overline{\mathcal{K}}$, axiomatisierbar sein, so sind beide bereits endlich axiomatisierbar.

Aufgabe 2 5 + 5 Punkte

Geben Sie für die nachfolgenden Klassen jeweils ein – wenn möglich endliches – Axiomensystem an, oder zeigen Sie, dass kein Axiomensystem existiert. Beweisen Sie gegebenenfalls, dass es kein Endliches gibt. Im Folgenden ist $\sim$ ein zweistelliges Relationssymbol und f ein einstelliges Funktionssymbol.

(a) Die Klasse aller $\{\sim\}$-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \sim^{\mathfrak{A}})$, wobei $\sim^{\mathfrak{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A ist, so dass es für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ein $a \in A$ mit $|\{b \in A : b \sim^{\mathfrak{A}} a\}| = n$ gibt.

(b) Die Klasse aller $\{\sim\}$-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \sim^{\mathfrak{A}})$, wobei $\sim^{\mathfrak{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A ist, so dass es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt, für das für alle $a \in A$ gilt $|\{b \in A : b \sim^{\mathfrak{A}} a\}| \neq n$.

Hinweis: Nutzen Sie die Aussagen aus Aufgabe 1!

Aufgabe 3 (2 + 3 + 2 + 3) + 3 Punkte

(a) Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass die angegebene Klasse axiomatisierbar ist. Geben Sie ein (endliches) Axiomensystem für die Klasse an, oder beweisen Sie, dass es kein (endliches) gibt.

  (i) Die Klasse aller zu $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ isomorphen Strukturen (mit üblicher Interpretation von $+, \cdot$ in der angegebenen Struktur).

  (ii) Die Klasse aller Bäume mit beliebig langen, aber endlichen Pfaden (mit der Signatur $\tau = \{E\}$).

  (iii) Die Klasse aller endlichen, dichten, linearen Ordnungen (mit der Signatur $\tau = \{<\}$).

  (iv) Die Klasse aller Kreise (d.h ungerichtete Graphen (V, E), in denen von jedem Knoten zu jedem anderen genau zwei Pfade, also Folgen von Kanten ohne Wiederholungen, existieren).

(b) Gibt es eine Formelmenge $\Phi \subseteq \text{FO}(\tau)$, wobei $\tau = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ und f_n jeweils ein n-stelliges Funktionssymbol ist, so dass $\varnothing \neq \text{Mod}(\Phi) \subseteq \{\mathfrak{A} : |A| > |\mathbb{N}|\}$?

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss18/18ss-19268/