Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Wilke

SS 2018

11. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 11.07., um 12:15 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, Erdgeschoss) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Diese Woche gibt es keinen eTest!

Aufgabe 1 7 Punkte

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Erfüllbarkeitsproblem der Prädikatenlogik unentscheidbar ist. Das heißt es gibt keinen Algorithmus, der, zu jedem gegebenen FO-Satz entscheidet, ob dieser ein Modell besitzt. Wir wollen nun zeigen, dass es jedoch entscheidbare Teilprobleme gibt. Sei dazu $\mathcal{K}$ eine Klasse von τ-Strukturen. Das Erfüllbarkeitsproblem von $\mathrm{FO}(\tau)$ *modulo* $\mathcal{K}$ ist, zu entscheiden, ob ein gegebener τ-Satz ein Modell in $\mathcal{K}$ hat.

Zeigen Sie, dass das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathrm{FO}(\{E\})$ modulo der Klasse aller Sterne entscheidbar ist. Dabei ist E ein zweistelliges Relationssymbol.
Hinweis: Ein *Stern* ist ein Modell des Satzes $\varphi_S := \exists x \forall y \forall z (Eyz \leftrightarrow (y = x \land z \neq x))$.

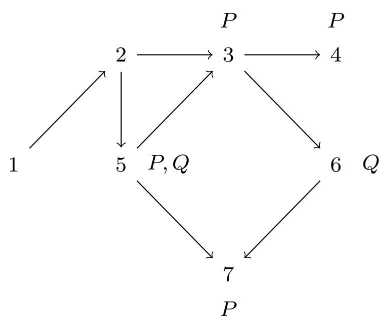
Aufgabe 2 4 + 4 Punkte

Betrachten Sie das unten angegebene Transitionssystem $\mathcal{K} = (V, E, P, Q)$. Geben Sie für φ_i (mit kurzer Begründung) die Menge $[\![\varphi_i]\!]^{\mathcal{K}} := \{v \in V : \mathcal{K}, v \models \varphi_i\}$ an.

(a) $\varphi_1 := \Diamond\Box(\Diamond P \to \Diamond Q)$

(b) $\varphi_2 := \Box\Box(P \to \Diamond P)$

$\mathcal{K}$:



Aufgabe 3 je 3 = 12 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir Transitionssysteme der Form $\mathcal{K} = (V, E, P, Q)$, wobei E die (einzige) Kantenbeziehungen ist und $P, Q \subseteq V$ die atomaren Eigenschaften sind. Ist $v \in V$, so nennen wir $w \in V$ einen (P/Q-) Nachfolger von v, wenn $(v, w) \in E$ (und $w \in P$ bzw. Q) gilt.

(a) Beschreiben Sie folgende Aussagen in der Modallogik. Geben Sie dazu eine Formel φ an, so dass $\mathcal{K}, v \models \varphi$ genau dann gilt, wenn v die geforderte Eigenschaft erfüllt.

  (i) Jeder P-Nachfolger jedes Nachfolgers von v hat einen P-Nachfolger.

  (ii) Wenn v einen Q-Nachfolger hat, dann hat v auch einen P-Nachfolger.

(iii) Jeder maximal lange Weg von v aus, der Länge mindestens 2 hat, hat Länge genau 3.

Hinweis: Auf einem Weg darf es Knotenwiederholungen geben.

(b) Geben Sie eine erfüllbare Formel φ an, so dass aus $\mathcal{K}, v \vDash \varphi$ folgt, dass v mindestens vier verschiedene Nachfolger hat.