**Lehr- und Forschungsgebiet**
**Mathematische Grundlagen der Informatik**
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Wilke

SS 2018

# 2. Übung Mathematische Logik

**Abgabe**: bis Mittwoch, den 02.05., um 12:15 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, Erdgeschoss) oder in der Vorlesung.

**Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.**
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

**Aufgabe 1** 6 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum[1].

**Aufgabe 2** 2 + 3 Punkte

Nutzen Sie den Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung, um folgende Probleme zu lösen. Geben Sie dabei in jedem Schritt die markierten Variablen an.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Formel erfüllbar ist. Geben Sie ggf. ihr minimales Modell an.

$$(A \wedge B \wedge C \to 0) \wedge (1 \to A) \wedge (F \to K) \wedge (B \wedge D \to E) \wedge (D \to F) \wedge (A \wedge D \to B) \wedge (A \to D)$$

(b) Zeigen Sie, dass die Folgerungsbeziehung gilt:

$$\{X \wedge Y \to Z, V \to Y, X \wedge W \to V, Z \to 0, X \wedge U \to W\} \models \neg X \vee \neg U$$

**Aufgabe 3** 4 + 1 + 3 + 5 Punkte

(a) Für zwei Interpretationen $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2 \colon \tau \to \{0,1\}$ sind die Operationen wie folgt definiert:

**Schnitt:** $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2(X) := \min(\mathfrak{I}_1(X), \mathfrak{I}_2(X))$

**Vereinigung:** $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2(X) := \max(\mathfrak{I}_1(X), \mathfrak{I}_2(X))$

**Komplement:** $\neg\mathfrak{I}_1(X) := 1 - \mathfrak{I}_1(X)$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass Modelle von Horn-Formeln unter (i) Schnitt, (ii) Vereinigung, (iii) Komplement abgeschlossen sind, d.h. wenn $\varphi$ eine Horn-Formel ist, und $\mathfrak{I}_1 \models \varphi, \mathfrak{I}_2 \models \varphi$, gilt dann auch (i) $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2) \models \varphi$, (ii) $(\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2) \models \varphi$, (iii) $\neg\mathfrak{I}_1 \models \varphi$?

(b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass jede erfüllbare Horn-Formel ein eindeutiges kleinstes Modell besitzt. Gilt auch die Umkehrung, also ist jede Formel, die ein eindeutiges kleinstes Modell besitzt, äquivalent zu einer Horn-Formel? *Hinweis:* Verwenden Sie für Ihre Argumentation Aufgabenteil (a).

(c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Formeln äquivalent zu einer Horn-Formel sind. *Hinweis:* Verwenden Sie für Ihre Argumentation Aufgabenteil (a).

(i) $(C \wedge D) \to (R \vee Q)$;

(ii) $X \wedge \neg(\neg Y \to (\neg Y \wedge X)) \wedge ((X \wedge Y) \to (Y \vee \neg Z))$;

(iii) $X \leftrightarrow \neg Y$.

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss18/18ss-19268/

(d) Sei φ eine aussagenlogische Formel deren Modelle unter Schnitt abgeschlossen sind. Zeigen Sie, dass φ logisch äquivalent zu einer Horn-Formel ist.

*Hinweis: Wählen Sie aus allen Darstellungen von φ in disjunktiver Normalform, d.h.* $\varphi \equiv \bigwedge_i \bigvee_j K_{i,j}$*, eine solche, für die* $\max_i\{\mathrm{pos}(\bigvee_j K_{i,j})\}$ *minimal ist. Dabei bezeichnet* $\mathrm{pos}(C)$*, für eine Klausel* $C$*, die Anzahl der in* $C$ *positiv vorkommenden Literale.*

**Aufgabe 4** 9 Punkte

Im Folgenden bezeichnen Φ, Ψ und Θ beliebige aussagenlogische Formelmengen und $\varphi, \psi, \vartheta \in$ AL. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

(a) $\Phi \vDash \varphi$ impliziert $\Psi \vDash \varphi$ für alle (i) $\Psi \subseteq \Phi$, beziehungsweise (ii) $\Psi \supseteq \Phi$.

(b) Wenn $\varphi \vDash \psi$ und $\psi \vDash \vartheta$ dann auch $\varphi \vDash \vartheta$.

(c) $\vDash \varphi \to \psi$ genau dann, wenn $\varphi \vDash \psi$.

(d) Aus ($\Phi \vDash \varphi$ gdw. $\Psi \vDash \psi$) folgt ($\Phi \cup \Theta \vDash \varphi$ gdw. $\Psi \cup \Theta \vDash \psi$).

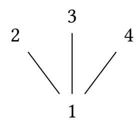
(e) Aus $\Phi \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ und $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vDash \psi$ folgt bereits $\Phi \vDash \psi$.

(f) Sei $\Phi_0 \supseteq \Phi_1 \supseteq \cdots$ und $\Phi_n \vDash \varphi$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n \vDash \varphi$.

**Aufgabe 5** 7 + 2* Punkte

Seien $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ zwei Graphen. Ein *Homomorphismus* von $G$ nach $H$ ist eine Funktion $\rho\colon V_G \to V_H$, so dass aus $(v, w) \in E_G$ folgt $(\rho(v), \rho(w)) \in E_H$. D.h. jede Kante aus $G$ wird auf eine Kante aus $H$ abgebildet. Wir sagen in diesem Fall, dass $G$ *homomorph* zu $H$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass ein beliebiger Graph $G$ genau dann homomorph zu dem unten angegebenen Graphen $H$ ist, wenn jeder endlicher Teilgraph $G'$ von $G$ homomorph zu $H$ ist.




(b*) Gilt die Aussage auch falls $H$ ein beliebiger, unendlicher Graph ist?

**Aufgabe 6*** 5* Punkte

Die positive Potenzmenge $\mathcal{P}^+(A)$ einer Menge $A$ ist die Menge all ihrer nicht-leeren Teilmengen: $\mathcal{P}^+(A) := \{B : \varnothing \neq B \subseteq A\}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Zornschen Lemma, dass es eine Funktion $f\colon \mathcal{P}^+(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $f(X) \in X$ für alle $X \in \mathcal{P}^+(\mathbb{R})$ gibt.
*Hinweis: Setzen Sie* $A = \{g\colon \mathrm{Def}(g) \to \mathbb{R} : \mathrm{Def}(g) \subseteq \mathcal{P}^+(\mathbb{R})$ *und* $g(X) \in X$ *für alle* $X \in \mathrm{Def}(g)\}$ *und definieren Sie für* $g, g' \in A$ *die Relation* $g < g'$ *:gdw.* $\mathrm{Def}(g) \subsetneq \mathrm{Def}(g')$ *und* $g(X) = g'(X)$ *für alle* $X \in \mathrm{Def}(g)$.