Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Wilke

SS 2018

3. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 09.05., um 12:15 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, Erdgeschoss) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 0 7 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum[1].

Aufgabe 1 7 Punkte

Nutzen Sie den Kompaktheitssatz, um zu zeigen, dass die Teilmengen der natürlichen Zahlen als „groß“, bzw. „klein“ kategorisiert werden können, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(a) Jedes $u \subseteq \mathbb{N}$ ist entweder groß, oder klein, aber nicht beides.

(b) Alle endlichen Mengen sind klein.

(c) Die Vereinigung zweier kleiner Mengen ist ebenfalls klein.

(d) Teilmengen von kleinen Mengen sind klein.

(e) Eine Menge ist genau dann groß, wenn ihr Komplement klein ist.

Hinweis: Beobachten Sie, dass man ohne Bedingung (b) genau die Mengen als groß bezeichnen könnte, die eine feste Zahl $n \in \mathbb{N}$ enthalten.

Aufgabe 2 4 + 4 Punkte

Verwenden Sie die Resolutionsmethode, um die nachfolgenden Aussagen zu zeigen oder zu widerlegen.

(a) $((W \vee \neg Z) \wedge (W \vee \neg X)) \vee (\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y) \vee \neg(Z \rightarrow X) \vee (\neg Y \wedge \neg W)$ ist eine Tautologie.

(b) $\{A \wedge B \rightarrow C, A \wedge C \rightarrow D, E \rightarrow B, A, D \wedge C \wedge B \rightarrow E\} \models B \rightarrow (A \wedge E \wedge F)$.

Aufgabe 3 2 + 2 Punkte

Wir definieren die *Doppelresolution* analog zum Resolutionsverfahren aus der Vorlesung, jedoch mit einem neuen Resolventenbegriff: Seien C, C_1, C_2 Klauseln. C heißt *Doppelresolvente* von C_1 und C_2, falls es (nicht notwendigerweise verschiedene) Literale Y, Z gibt, so dass $\{Y, Z\} \subseteq C_1$, $\{\overline{Y}, \overline{Z}\} \subseteq C_2$ und

$$C = (C_1 \setminus \{Y, Z\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{Y}, \overline{Z}\}) .$$

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Der Doppelresolutionskalkül ist vollständig.

(b) Der Doppelresolutionskalkül ist korrekt.

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss18/18ss-19268/

Aufgabe 4 2 + 2 + 6 Punkte

Wie zuvor definieren wir eine Variante des Resolutionskalkül: Den negativen Resolutionskalkül. Das Verfahren ist analog zum Resolutionskalkül aus der Vorlesung, mit der Änderung, dass eine Resolvente aus C_1 und C_2 nur noch dann gebildet werden darf, wenn in einer der beiden Klauseln ausschließlich negative Literale vorkommen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Jede Klauselmenge, in der jede Klausel mindestens ein positives Literal enthält, ist erfüllbar.

(b) Der negative Resolutionskalkül ist korrekt.

(c) Der negative Resolutionskalkül ist vollständig.
Hinweis: Orientieren Sie sich am Vollständigkeitsbeweis für den Resolutionskalkül aus der Vorlesung.

Aufgabe 5 5 Punkte

Welche der folgenden Sequenzen sind gültig? Begründen Sie ihre Antwort.

(a) $\Gamma, \varphi, \varphi \to \psi \Rightarrow \Delta, \psi$

(b) $\Gamma, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi$

(c) $\Gamma, \varphi, \neg\varphi \Rightarrow \varnothing$

(d) $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \neg\varphi$

(e) $\Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi$