Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Wilke

SS 2018

5. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 30.05., um 12:15 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, Erdgeschoss) oder in der Vorlesung.

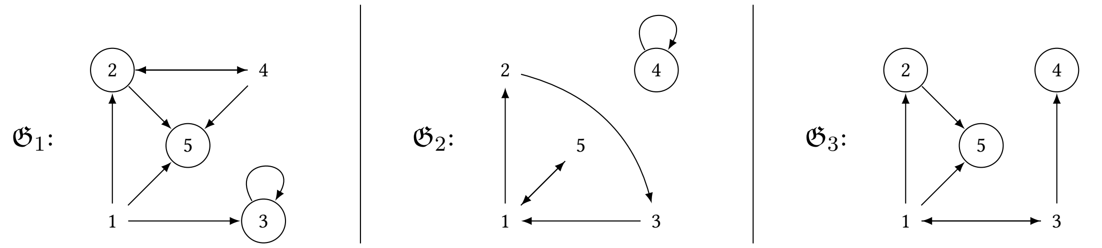
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 0 — 9 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum[1].

Aufgabe 1 — 9 Punkte

Betrachten Sie die $\{E, R\}$-Strukturen (gefärbte Graphen) $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$, dabei ist R ein einstelliges und E ein zweistelliges Relationssymbol. Geben Sie mit einer kurzen Begründung an, ob $\mathfrak{G}_i \models \varphi_j$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ gilt.



Dabei ist $x \longrightarrow y$ eine grafische Darstellung von $(x, y) \in E^{\mathfrak{G}_i}$ (sollte keine Kante gezeichnet sein, gilt $(x, y) \notin E^{\mathfrak{G}_i}$). Der Knoten x ist genau dann umrandet, wenn $x \in R^{\mathfrak{G}_i}$ gilt.

- $\varphi_1 := \exists x \, \forall y \, (Ry \rightarrow Exy)$
- $\varphi_2 := \forall x \, \forall y \, (x = y \lor Rx \lor Ry \lor Exy)$
- $\varphi_3 := (\exists x \, (Rx \land Exx)) \rightarrow (\exists x \, \exists y \, \exists z \, (x \neq y \land y \neq z \land z \neq x \land Exy \land Eyz \land Ezx))$

Aufgabe 2 — 7 Punkte

Wir betrachten die Struktur $\mathfrak{A} = (\mathcal{P}(A), \cup^{\mathfrak{A}})$, wobei A eine beliebige, nicht-leere Menge ist und $\cup^{\mathfrak{A}}$ die übliche Vereinigung zweier Mengen aus der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ von A beschreibt. Geben Sie FO($\{\cup\}$) Formeln an, die folgende Sachverhalte beschreiben. Achten Sie dabei besonders auf die freien Variablen in Ihren Formeln. Beschreiben Sie die Idee Ihrer Formel knapp.

(a) $x = \varnothing$

(b) $x \subseteq y$

(c) $x \cap y = z$

Hinweis: Wenn Sie eine Formel definiert haben, können Sie diese in den anderen Teilaufgaben verwenden.

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss18/18ss-19268/

Aufgabe 3 10 Punkte

Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathfrak{R}}, \exp^{\mathfrak{R}})$ wobei $+^{\mathfrak{R}}$ die übliche Addition und $\exp^{\mathfrak{R}}(x) = e^x$ die Exponentialfunktion beschreibt. Geben Sie $\mathrm{FO}(\{+, \exp\})$ Formeln an, die folgende Sachverhalte beschreiben. Achten Sie dabei besonders auf die freien Variablen in Ihren Formeln. Beschreiben Sie die Idee Ihrer Formel knapp.

(a) $x = 1$

(b) $x < y$

(c) $x = -y$

(d) $x \cdot y = z$

Hinweis: Wenn Sie eine Formel definiert haben, können Sie diese in den anderen Teilaufgaben verwenden.

Aufgabe 4 3 Punkte

Wir nennen $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ *universell*, wenn φ die Gestalt $\forall x_1 \cdots \forall x_n \psi$ hat, wobei ψ quantorenfrei ist. Mit $\forall\mathrm{FO}(\tau)$ bezeichnen wir alle universellen $\mathrm{FO}(\tau)$ Formeln.

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Zeigen Sie, dass aus $\mathfrak{B} \models \varphi$ bereits $\mathfrak{A} \models \varphi$ für alle Sätze $\varphi \in \forall\mathrm{FO}(\tau)$ folgt. Geben Sie weiter ein Beispiel an, das zeigt, dass dieser Zusammenhang nicht gilt, wenn φ nicht universell ist.

Aufgabe 5 2+3 Punkte

(a) Schreiben Sie die folgende Formel in Negationsnormalform.

$$\neg\forall x\, \exists x\, (Qx \lor fc = y) \land (\neg\exists z\, (Rzz \rightarrow (\exists y(Qy \lor Qz))))$$

(b) Schreiben Sie die folgende Formel in Pränexnormalform.

$$\forall x(\exists y(\neg(Rxy \land \forall z\, Rzz) \lor \exists x(Qx \land \exists z\, Rxz)) \lor \exists y\, Ryy)$$