Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Wilke

SS 2018

6. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 06.06., um 12:15 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, Erdgeschoss) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 0 — 5 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum[1].

Aufgabe 1 — 3 Punkte

Überführen Sie folgenden Satz in Skolem-Normalform.

$$\forall x \forall y (\exists z (Rxy \to \neg(\exists x Sx) \land \exists z (\forall w \exists v (Rzw \lor Rwv))))$$

Aufgabe 2 — 3 + 3 Punkte

(a) Konstruieren Sie einen erfüllbaren Satz, dessen Modelle alle unendlich groß sind. Finden Sie dazu eine geeignete Signatur.

(b) Seien c, d Konstantensymbole, sowie E ein zweistelliges Relationssymbol. Konstruieren Sie eine Formelmenge $\Phi \subseteq \text{FO}(\{E, c, d\})$, sodass für alle Graphen $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ gilt: $(G, E^{\mathfrak{G}})$ ist ein unzusammenhängender Graph, genau dann, wenn $\mathfrak{G}$ Redukt einer Struktur $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H} \models \Phi$ ist.

Aufgabe 3 — 10 Punkte

Seien $E, <$ zweistellige, A, B einstellige Relationssymbole und f ein einstelliges Funktionssymbol. Geben Sie ein – wenn möglich endliches – Axiomensystem für die folgenden Strukturklassen an.

(a) $\mathcal{K}_a = \{(U, E) : (U, E)$ ist ein ungerichteter Graph mit beliebig großen endlichen Cliquen$\}$

(b) $\mathcal{K}_b = \{(U, <) : <$ ist eine lineare Ordnung, die weder diskret, noch dicht ist$\}$

(c) $\mathcal{K}_c = \{(U, f, A) : A \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(A)\}$[2]

(d) $\mathcal{K}_d = \{(U, E, A, B) : E$ ist der Graph einer surjektiven Funktion von A nach $B\}$

(e) $\mathcal{K}_e = \{(U, <) : <$ ist eine lineare Ordnung und es gibt unendlich viele $a \in U$, für die nur endlich viele $b \in U$ mit $b < a$ existieren$\}$

Aufgabe 4 — 8 Punkte

Sei τ eine beliebige Signatur, sowie $\varphi, \psi \in \text{FO}(\tau)$ und $\Phi \subseteq \text{FO}(\tau)$. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, ob die Aussagen gelten.

(a) Ist $\varphi \not\equiv \psi$, so gilt $\Phi \not\models \varphi$ oder $\Phi \not\models \varphi \to \psi$.

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss18/18ss-19268/
[2] f^n bezeichnet die n-fache Anwendung von f.

(b) Wenn $\Phi \models \varphi$ und $\forall x \varphi \models \forall x \psi$, dann gilt bereits $\Phi \models \psi$.

(c) Wenn $\forall x\, \varphi \equiv \exists x\, \psi$, dann auch $\exists x\, \varphi \equiv \forall x\, \psi$.

(d) Sollte $x \notin$ frei(Φ) sein und $\Phi \models \varphi$, so gilt $\Phi \models \forall x\, \varphi$.

Aufgabe 5 5 Punkte

Geben Sie das Auswertungsspiel MC($\mathfrak{A}, \varphi$) für $\mathfrak{A} = (\{0, 1, 2\}, + \mod 3, R^{\mathfrak{A}} = \{0\})$ und $\varphi = \forall x\, (\neg Rx \rightarrow \exists y\, (Rx + y \wedge \neg \forall x\, x = y))$ an. Zeigen Sie, ob $\mathfrak{A} \models \varphi$ gilt, indem Sie eine passende Gewinnstrategie angeben.

Aufgabe 6 6 Punkte

Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ ein Spielgraph und $T \subseteq V$. Eine *Falle* für Spieler σ ist eine Teilmenge F der Knoten V, von denen aus Spieler $1 - \sigma$ eine Strategie hat, die erzwingt, dass F nicht verlassen wird (und Spieler $1 - \sigma$ nicht verliert). Geben Sie FO($\{V_0, V_1, E, T\}$)-Formeln an, die, ausgewertet auf $(\mathcal{G}, T)$, die folgenden Sachverhalte ausdrücken.

(a) Spieler 0 verliert das Spiel nach maximal 2 Zügen, unabhängig davon, wie der Gegner spielt.

(b) Spieler 0 kann von v aus nach höchstens n Zügen gewinnen (für ein festes $n \in \mathbb{N}$).

(c) T ist eine Falle für Spieler σ.