Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Wilke

SS 2018

7. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 13.06., um 12:15 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, Erdgeschoss) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 0 — 7 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum[1].

Aufgabe 1 — (3 + 2) + 5 Punkte

Eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$ heißt *starr*, wenn ihr einziger Automorphismus die Identität ist.

(a) Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur in der jedes Element elementar definierbar ist, d.h. für alle $a \in A$ ist die Menge $\{a\}$ in $\mathfrak{A}$ durch eine Formel $\varphi_a(x)$ definierbar. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}$ starr ist.

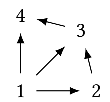
Gilt die Umkehrrichtung auch?

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Strukturen starr sind.

(i) $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$

(ii) $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +)$

(iii) $\mathfrak{G} = (V, E)$:



(iv) $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, <, P, Q)$, wobei $P = 5\mathbb{Z}$ und $Q = 6\mathbb{Z}$

Aufgabe 2 — 10 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die angegebenen Relationen in der gegebenen Struktur elementar definierbar sind.

(a) Die Menge $\mathbb{Q}_{\geq 1}$ in $(\mathbb{Q}, \cdot)$.

(b) Die Menge $3\mathbb{N}$ in $(\mathbb{N}, +)$.

(c) Die Relation $\{(a, b) : \mathrm{ggt}(a, b) \neq 1\}$ in $(\mathbb{N}, +, \cdot)$.[2]

(d) Die Menge $\{0, 1, 2\}$ in $(\mathbb{N}, <)$

(e) $\{(a, b) : |a - b| = 3\}$ in $(\mathbb{Q}, <)$

Aufgabe 3 — 3 + 6 + 4 Punkte

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Strukturen mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. $\mathfrak{A}$ heißt *elementare Substruktur* von $\mathfrak{B}$ (geschrieben $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$), falls für jede Formel $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in \mathrm{FO}(\tau)$ und alle $a_1, \dots, a_k \in A$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k) \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_k).$$

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss18/18ss-19268/
[2] $\mathrm{ggt}(a, b)$ bezeichnet den größten gemeinsamen Teiler von a und b.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die folgenden Aussagen für beliebige τ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$:

(i) Wenn $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \preceq \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$, dann $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

(ii) Wenn $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, dann $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

(b) Sei τ relational und $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *elementare Kette* von τ-Strukturen, das heißt $\mathfrak{A}_i \preceq \mathfrak{A}_j$ für alle $i < j$. Wir definieren $\mathfrak{A} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n := (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^{\mathfrak{A}_n})_{R\in\tau})$.

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}_n \preceq \mathfrak{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Seien $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen. Beweisen Sie: Es gilt $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ genau dann, wenn für jede FO(τ)-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ und alle $a_1, \dots, a_k \in A$ gilt: Wenn $\mathfrak{B} \models \exists y \varphi(a_1, \dots, a_k, y)$, dann gilt bereits $\mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_k, a)$ für ein $a \in A$.

Aufgabe 4 2 + 6 Punkte

Sei τ eine endliche Signatur und $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Wir definieren die Relation $\simeq \subseteq A \times A$, so dass für alle $a, b \in A$ gilt $a \simeq b$ genau dann, wenn es einen Automorphismus $\pi\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ mit $\pi(a) = b$ gibt.

(a) Zeigen Sie, dass $\simeq$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) In dieser Aufgabe ist $\mathfrak{A}$ eine endliche τ-Struktur. Bezeichne $k := |A/_{\simeq}|$ die Anzahl der Äquivalenzklassen von $\simeq$. Beweisen Sie, dass

$$|\{X \subseteq A : X \text{ ist in } \mathfrak{A} \text{ elementar definierbar}\}| = 2^k.$$

Aufgabe 5* 10* Punkte

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass jeder erfüllbare FO-Satz ein abzählbares Modell besitzt. Sei τ eine beliebige Signatur, $\tau_0 \subseteq \tau$ eine endliche Teilmenge und $\mathfrak{B}$ eine τ_0-Struktur.

(a) Zeigen Sie, dass für jede nicht-leere endliche Teilmenge $M \subseteq B$ eine abzählbare minimale Substruktur $\mathfrak{A}_M \subseteq \mathfrak{B}$ existiert, deren Universum M enthält. (Mit anderen Worten: Die von M induzierte Substruktur ist abzählbar.)

(b) Sei $\varphi = \forall x_1 \cdots \forall x_k\, \eta \in \forall\text{FO}(\tau_0)$ ein Satz, wobei η quantorenfrei ist. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B} \models \varphi$ genau dann gilt, wenn $\mathfrak{A}_M \models \varphi$ für alle nicht-leeren endlichen Teilmengen $M \subseteq B$ gilt.

(c) Verwenden Sie (a) und (b) sowie den Satz über die Skolem-Normalform aus der Vorlesung, um zu zeigen: Ist $\psi \in \text{FO}(\tau)$ ein erfüllbarer Satz, so besitzt ψ ein abzählbares Modell.

(d) Hat auch jede erfüllbare Satzmenge $\Phi \subseteq \text{FO}(\tau)$ stets ein abzählbares Modell?