

8. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 20.06., um 12:15 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, Erdgeschoss) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.

Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 0

9 Punkte

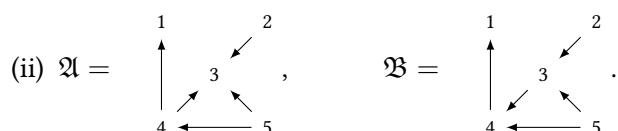
Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum¹.

Aufgabe 1

3 + 3 + 4 Punkte

- (a) Geben Sie jeweils die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ für die $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$ gilt an, oder zeigen Sie, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Geben Sie im ersten Fall einen trennenden Satz φ vom Quantorenrang m , sowie Gewinnstrategien für den Herausforderer bzw. die Duplikatorin im Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ bzw. $\mathcal{G}_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an.

- (i) $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}_{\geq 0}, \cdot^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}_{\geq 0}, \cdot^{\mathfrak{B}})$ wobei $\cdot^{\mathfrak{A}}$ und $\cdot^{\mathfrak{B}}$ jeweils die Graphen der entsprechenden Multiplikation sind.



- (b) Zeigen Sie, dass die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte vollständig ist.

Aufgabe 2

7 Punkte

Eine *Wohlordnung* ist eine lineare Ordnung $(A, <)$, in der es keine unendlichen, absteigenden Ketten, also Folgen der Form $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$, gibt. Zeigen Sie, dass die Klasse aller Wohlordnungen nicht $\text{FO}(\{<\})$ axiomatisierbar ist.

Hinweis: Definieren Sie für zwei Ordnungen $(A, <)$ und $(B, <)$ die Ordnung $(A, <) + (B, <) := (A \times \{0\} \cup B \times \{1\}, \triangleleft)$ mit $(x, y) \triangleleft (v, w) : \text{gdw. } y < w \text{ oder } y = w \text{ und } x < v \text{ bzw. } x \triangleleft v$.

Aufgabe 3

4 + 4 Punkte

Sei τ endlich und relational, sowie \mathcal{K} eine Klasse von τ -Strukturen.

- (a) Sei $\Phi \subseteq \text{FO}(\tau)$ und $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Phi)$. Zeigen Sie, dass für jede τ -Struktur \mathfrak{B} gilt: Sollte es für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Struktur $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$ geben so dass $\mathfrak{B} \equiv_m \mathfrak{A}_m$, dann ist $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$.

- (b) Nutzen Sie diese Aussage, um zu zeigen, dass

$\mathcal{K} := \{ \mathfrak{G} = (V, E^{\mathfrak{G}}) : (V, E^{\mathfrak{G}}) \text{ ist ein gerichteter Graph und von jedem Knoten } v \in V \text{ aus} \\ \text{sind nur endlich viele Knoten erreichbar.} \}$

nicht $\text{FO}(\{E\})$ -axiomatisierbar ist.

¹<https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss18/18ss-19268/>

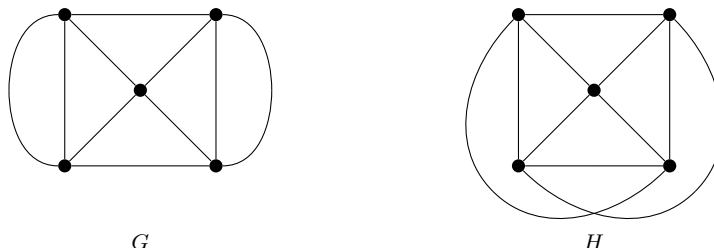
Aufgabe 4

8 Punkte

Ein Graph G heißt *planar*, wenn er in der 2-dimensionalen Ebene so gezeichnet werden kann, dass keine zwei verschiedenen Kanten sich überschneiden. Beweisen Sie, dass es *keinen* Satz $\varphi \in \text{FO}(\{E\})$ gibt mit

$$G \models \varphi \iff G \text{ ist ein planarer (ungerichteter) Graph.}$$

Hinweis: Betrachten Sie den folgenden planaren Multi-Graphen² G und den nicht-planaren Graphen H :



Konstruieren Sie nun zwei Familien $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von planaren bzw. nicht-planaren ungerichteten Graphen (keine Multi-Graphen!) und verwenden Sie dann die Methode von Ehrenfeucht und Fraïssé. Es genügt, die Gewinnstrategien der Duplikatorin in den entsprechenden Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen nur zu skizzieren.

Aufgabe 5*

10* Punkte

Wir wollen die fehlende Richtung des Satzes von Ehrenfeucht und Fraïssé zeigen. Sei $\tau = \{R_1, \dots, R_m\}$ endlich und relational, wobei R_i die Stelligkeit r_i habe.

- Konstruieren Sie für jedes $k \geq 1$, \mathfrak{A} und jedes k -Tupel a_1, \dots, a_k aus \mathfrak{A} eine quantorenfreie Formel $\Theta_{\mathfrak{A}, \bar{a}}(x_1, \dots, x_k)$, so dass für jede τ -Struktur \mathfrak{B} und jedes k -Tupel b_1, \dots, b_k aus \mathfrak{B} gilt: $\mathfrak{B} \models \Theta_{\mathfrak{A}, \bar{a}}(b_1, \dots, b_k)$ gdw. die Abbildung $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ ein lokaler Isomorphismus von \mathfrak{A} nach \mathfrak{B} ist.
- Begründen Sie, dass es für festes τ und k nur endlich viele Formeln $\Theta_{\mathfrak{A}, \bar{a}}(x_1, \dots, x_k)$ gibt, obwohl es unendlich viele τ -Strukturen \mathfrak{A} und k -Tupel \bar{a} gibt. Geben Sie die Anzahl der Formeln in Abhängigkeit von k, r_1, \dots, r_m an.
- Konstruieren Sie, für jedes $k > 0$, \mathfrak{A} und a_1, \dots, a_k eine Formel $\eta_{\mathfrak{A}, \bar{a}}(x_1, \dots, x_k)$ mit Quantoren-rang 1, so dass für alle \mathfrak{B} und (b_1, \dots, b_k) gilt: $\mathfrak{B} \models \eta_{\mathfrak{A}, \bar{a}}(b_1, \dots, b_k)$ gdw. die Duplikatorin das Spiel $G_1(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ gewinnt. Geben Sie weiter eine grobe Abschätzung der Anzahl der Formeln $\eta_{\mathfrak{A}, \bar{a}}(x_1, \dots, x_k)$ an.
- Verallgemeinern Sie Ihre Konstruktion auf eine beliebige Anzahl an Zügen m . Führen Sie dazu eine Induktion beginnend bei $m = 1$ durch.
- Folgern Sie daraus die in der Vorlesung *nicht* bewiesene Richtung des Satzes von Ehrenfeucht und Fraïssé.

²Ein Multi-Graph darf mehr als nur eine Kante zwischen zwei Knoten haben.