Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Wilke

SS 2018

9. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 27.06., um 12:15 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, Erdgeschoss) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 0 7 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum[1].

Aufgabe 1 6 + 4 + (2 + 2) Punkte

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls der Prädikatenlogik, dass es keine Menge gibt, die genau die Mengen enthält, die sich nicht selbst enthalten. Finden sie dafür zunächst eine geeignete Formalisierung der Aussage.

(b) Zeigen Sie, dass man bei den Regeln $(\exists \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \forall)$ die Bedingung, dass c nicht in Γ, Δ und ψ vorkommt nicht weglassen kann.

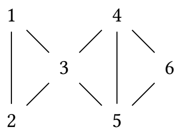
(c) Beweisen oder widerlegen Sie semantisch, d.h. nicht unter Anwendung des Sequenzenkalküls, die Korrektheit folgender Schlussregeln.

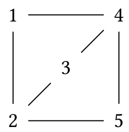
(i) $\dfrac{\Gamma, \forall x \varphi(x) \ \Rightarrow \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi(x) \ \Rightarrow \ \Delta}$

(ii) $\dfrac{\Gamma, \forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \ \Rightarrow \ \Delta, \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x))}{\Gamma, \exists x \varphi(x) \ \Rightarrow \ \Delta, \exists x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))}$

Aufgabe 2 4 + 4 Punkte

(a) Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass $\sim \, := \{(v, w) : |N(v)| = |N(w)|\}$, wobei $N(v) := \{w \in V : (v, w) \in E\}$, eine Kongruenzrelation auf der entsprechenden Struktur ist:

$\mathcal{G}_1$: 

, $\mathcal{G}_2$: 

.

(b) Sei $\mathfrak{A} := (\{0,1\}^+, \cdot)$, wobei $\{0,1\}^+$ die Menge der nichtleeren endlichen Wörter über $\{0,1\}$ und $v \cdot w = vw$ die Konkatenation bezeichnet. Weisen Sie nach, dass $\sim \, := \{(v, w) : |v|_0 = |w|_0\}$ eine Kongruenzrelation ist und dass $\mathfrak{A}/_\sim$ isomorph zu $(\mathbb{N}, +)$ ist. Für ein Wort $v \in \{0,1\}^*$ bezeichnet $|v|_0$ die Anzahl der 0en in v, zum Beispiel $|01001|_0 = 3$.

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss18/18ss-19268/

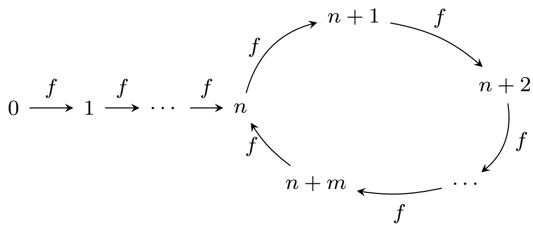
Aufgabe 3 3 + 9 + 1 Punkte

Sei $\tau = \{a, f\}$ für ein Konstantensymbol a und eine einstellige Funktion f. Weiter sei $\varnothing \neq T \subseteq \{f^n a = f^m a \ : \ n \neq m \in \mathbb{N}\}$ eine Menge atomarer Formeln über τ, Σ die kleinste Menge, die sowohl T enthält, als auch unter Substitution abgeschlossen ist.[2]

(a) Beschreiben Sie die Menge Σ für das Beispiel $T := \{f^3 a = f^7 a, f^9 a = f^{13} a\}$.

(b) Beweisen Sie, dass das kanonische Modell $\mathfrak{A}(\Sigma) := \mathfrak{H}(\Sigma)_{/\sim}$ isomorph zu einer Struktur $\mathfrak{A}_{k,\ell}$ für $k, \ell \in \mathbb{N}$ ist. Dabei bezeichnet $\mathfrak{A}_{n,m} := (\{0, 1, \ldots, n+m\}, a, f)$ wobei a als 0 interpretiert wird und $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < n+m \\ n, & \text{sonst} \end{cases}$

Die Struktur $\mathfrak{A}_{n,m}$ sieht wie folgt aus:



Beachten Sie, dass im Sonderfall $m = 0$ eine Kante von n zu sich selbst besteht.

Hinweis: Sie müssen k und ℓ nicht konkret angeben sondern nur zeigen, dass es ein solches $\mathfrak{A}_{k,\ell}$ gibt.

(c) Folgern Sie: Im Bezug auf das kanonische Modell ist jede nichtleere Menge von atomaren Sätzen T über τ somit äquivalent zu einer einelementigen Menge. Mit anderen Worten: Für jedes $T \neq \varnothing$ gibt es eine einelementige Menge $\{f^n a = f^m a\}$, so dass die beiden daraus resultierenden kanonischen Modelle gleich sind.

[2] Hier ist $f^0 a := a$.