Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Wilke

SS 2018

0. Übung Mathematische Logik

Dieses Übungsblatt dient als Vorbereitung zur Vorlesung und ist **freiwillig**. Die Aufgaben werden nicht korrigiert, aber in der ersten Übungswoche besprochen.

Aufgabe 1 0 Punkte

Die nachfolgenden Aussagen sollen aus rein logischer Sicht betrachtet werden und sind nicht notwendigerweise mit der „echten" Welt vereinbar.

(a) Formulieren Sie die Negation folgender Sätze (Ihr Satz darf nicht mit einem „Nicht" beginnen).

   (i) Alle Schwäne sind weiß.

   (ii) Zu jedem Topf gibt es einen passenden Deckel.

(b) Ist es möglich, dass folgende Sätze gleichzeitig erfüllt sind? Begründen Sie Ihre Antwort.

   - Alle Schwäne sind weiß.
   - Alle Schwäne sind schwarz.

(c) Welche der folgenden Aussagen implizieren einander? Betrachten Sie auch die Negation all dieser Aussagen: Gilt „(x) impliziert nicht (y)"oder „nicht (x) impliziert (y)"? Sie können auch die Konjunktion der Aussagen in Betracht ziehen: „(x) und (y) impliziert (z)".

   (i) Zu jedem Topf gibt es einen passenden Deckel.

   (ii) Es gibt genau einen Topf.

   (iii) Es gibt keine Töpfe.

   (iv) Es gibt keine Deckel.

Aufgabe 2 0 Punkte

Diese Aufgabe soll die mathematische Notation üben. In dieser Vorlesung gilt $0 \in \mathbb{N}$.

(a) Beschreiben Sie die folgenden Mengen umgangssprachlich.

   (i) $\{x \in \mathbb{N} \,:\, x \equiv 1 \mod 2\}$

   (ii) $\{x \in \mathbb{N} \,:\, \exists y\,(x = y \cdot y)\}$

(b) Schreiben Sie die Menge aller Primzahlen in Mengen-Notation.

Aufgabe 3 0 Punkte

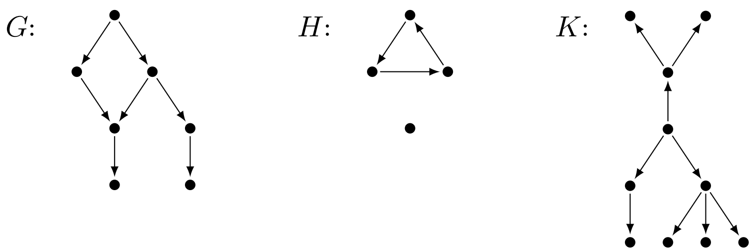
In dieser Aufgabe wiederholen wir das Konzept eines Graphen.

Ein *gerichteter Graph* ist eine Struktur $G = (V, E)$, wobei $V \neq \varnothing$ eine beliebige nicht-leere Menge und $E \subseteq V \times V$ ist. Wir nennen V die *Knoten* und E die *Kanten* von G. Wir können die Knoten als Punkte und die Kanten als Pfeile darstellen: $v \longrightarrow w$ ist eine grafische Darstellung des Graphen $(\{v, w\}, \{(v, w)\})$. Eine Kante (v, w) ist von v *ausgehend* und in w *eingehend*. Ein *ungerichteter Graph* ist ein Graph $G = (V, E)$, bei dem für alle Knoten $v, w \in V$ gilt, dass $(v, w) \in E$ bereits $(w, v) \in E$ impliziert. Wir zeichnen Kanten in solchen Graphen ohne Pfeilspitzen.

Wir nennen eine nicht-leere Folge von Knoten $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ einen *Pfad*[1] der Länge $n-1$, wenn $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$. Für solch einen Pfad ist v_1 der *Anfangs-* und v_n der *Endknoten*. Wir nennen einen Graphen $G = (V, E)$ *zusammenhängend*, falls für alle $v, w \in V$ ein Pfad ohne Berücksichtigung der Kantenorientierung mit Anfangsknoten v und Endknoten w existiert (es gibt immer einen Pfad von v nach v der Länge 0). Ein *Zykel* (von v) ist ein Pfad der Länge > 0 mit Anfangs- und Endknoten v.

Ein *Baum* mit Wurzel w ist ein zusammenhängender, zykelfreier, gerichteter Graph $\mathcal{T} = (V, E)$ mit $w \in V$ so, dass w keine, und alle anderen Knoten genau eine, eingehende Kante hat. Knoten ohne ausgehende Kanten nennen wir *Blätter*, alle anderen Knoten heißen *innere Knoten*.

(a) Welche der folgenden Graphen sind zusammenhängend, welche zykelfrei und welche Bäume?



(b) Ein *Binärbaum* ist ein Baum, $\mathcal{T} = (V, E)$ mit Wurzel w, bei dem jeder innere Knoten genau zwei Nachfolger („*Kinder*“) hat. Der Binärbaum $\mathcal{T}$ heißt *vollständig*, wenn für alle Knoten $u, v \in V$, die gleich weit von der Wurzel entfernt sind (d.h. der kürzeste Pfad zwischen w und u ist gleich lang zum kürzestem Pfad zwischen w und v) entweder beide Blätter oder beide innere Knoten sind.

Zeigen Sie per vollständiger Induktion: Die Anzahl der Blätter eines vollständigen Binärbaums ist gleich der Anzahl der inneren Knoten plus eins.

[1] Achtung: Oft wird, entgegen unserer Definition, verlangt dass die Knoten auf einem Pfad paarweise verschieden sind.