Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2017

Klausur Mathematische Logik

Name:	
Vorname:	
Matr.-Nr.:	
Studiengang:	

Rerun LaTeXto create point data

Hinweise
Dies ist eine Auswahlklausur. Zum Bestehen werden 45 Punkte ausreichen.

Unsere Regeln für die Klausur: Es sind *keine* Hilfsmittel (Skripte, Bücher, Mitschriften oder dergleichen) zugelassen.

Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Geben Sie alle Aufgabenblätter mit ab.

Einlesezeit: 15 Minuten
Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Hiermit bestätige ich, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen habe und prüfungsfähig bin.

Unterschrift

Aufgabe 1 23 Punkte

Sei τ eine endliche Signatur.

(a) (i) Sei 👻 ein Konstantensymbol. Ist der Satz $(\neg\exists x\, \text{👻} = x \rightarrow \neg\exists x\, x = x)$ erfüllbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Sei $\varphi = \forall x \forall y (x{+}y = y{+}x)$. Gilt $(\mathbb{N}, +) \models \varphi$? Ist φ auch allgemeingültig? Begründen Sie Ihre Antworten.

(iii) Geben Sie einen FO-Satz ψ an, sodass für jeden gerichteten Graphen $\mathfrak{G} = (V, E)$ gilt: $\mathfrak{G} \models \psi$ genau dann, wenn $\mathfrak{G}$ den Graphen $\bullet \longrightarrow \bullet$ als Substruktur enthält.

(iv) Geben Sie ein Modell der CTL-Formel $\mathrm{A}(P_0 \,\mathrm{U}\, P_1)$ an.

(b) Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen zutreffen und geben Sie eine *kurze* Begründung an (etwa, indem Sie ein Gegenbeispiel konstruieren, oder bekannte Ergebnisse aus der Vorlesung/Übung für Ihre Argumentation verwenden). Eine Antwort ohne Begründung wird mit 0 Punkten bewertet.

(i) Es gibt eine zu $\neg(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z)$ logisch äquivalente AL-Formel, in der nur die Junktoren $\rightarrow$ und $\neg$ vorkommen.

(ii) Das folgende Problem ist in Polynomialzeit entscheidbar: Gegeben eine Horn-Formel φ. Ist $\neg\varphi$ eine Tautologie?

(iii) Sei die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \neg\varphi, \psi$ im Sequenzenkalkül ableitbar. Dann ist $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar.

(iv) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Strukturen und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine unendliche Satzmenge. Wenn $\mathfrak{A} \models \Phi$ und $\mathfrak{B} \not\models \Phi$, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ sodass der Herausforderer das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt.

(v) Für jede endliche τ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist das folgende Problem entscheidbar: Gegeben ein FO-Satz φ. Ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cup \{\varphi\}$ erfüllbar?

(vi) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$ und $\psi \in \mathrm{FO}$, sodass $\Phi \models \psi$, und sei $\Phi_0 \subseteq \Phi$. Falls Φ_0 endlich ist, gilt bereits $\Phi_0 \models \psi$.

(vii) Sei $\mathfrak{A}$ eine Herbrandstruktur über der Signatur $\{f, c\}$, wobei c ein Konstantensymbol ist und f ein einstelliges Funktionssymbol. Wenn $\mathfrak{A} \models \exists x(c = fx)$, dann ist $f^{\mathfrak{A}}$ surjektiv.

(viii) Sei τ eine endliche Signatur, und sei $\mathcal{K}$ eine endliche Klasse von endlichen τ-Strukturen. Dann ist $\mathcal{K}$ auch (bis auf Isomorphie) endlich axiomatisierbar.

(ix) Jeder erfüllbare FO-Satz hat ein abzählbares Modell.

Aufgabe 2 27 Punkte

(a) Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass die folgenden Mengen funktional vollständig sind.

(i) Die Menge $\{f, 1\}$, mit

$$f(a,b,c) := \begin{cases} b \oplus c, & a = 0 \\ a \oplus b, & a = 1 \end{cases}$$

wobei $\oplus$ das exklusive Oder bezeichnet.

(ii) Die Menge $\{\not\to\}$ mit $[\![x \not\to y]\!]^{\mathfrak{I}} := 1 - [\![x \to y]\!]^{\mathfrak{I}}$.

(b) Geben Sie den Kompaktheitssatz der Aussagenlogik an.

(c) Weisen Sie mittels der Resolutionsmethode nach, dass diese Folgerungsbeziehung gilt:

$$\{A \rightarrow (B \wedge \neg C), A \vee B, D \vee A, \neg D \vee \neg A, B \rightarrow C, E \vee \neg B \vee \neg C\} \models (E \wedge B) \vee (\neg E \wedge \neg B)$$

(d) Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass die gegebenen Formeln äquivalent zu einer Horn-Formel sind.

(i) $\neg((X \to \neg Z) \land (\neg Z \to \neg X) \land ((\neg Y \land W) \lor (\neg W \land \neg Y)))$

(ii) $(((\neg Z \lor Y) \land (Z \lor \neg W)) \lor \neg X) \land (\neg Z \lor (Y \to W))$

(e) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils *semantisch* (d.h. *nicht* mittels Ableitung im SK), dass die folgenden Schlussregeln korrekt sind:

(i)

$$\frac{\Gamma, \exists x\, \varphi(x) \;\Rightarrow\; \Delta, \forall x\, \varphi(x)}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \forall x\, \varphi(x), \forall x\, \neg\varphi(x)}$$

(ii)

$$\frac{\Gamma, \varphi \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \qquad \Gamma, \psi \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi \leftrightarrow \psi}$$

Aufgabe 3 24 Punkte

(a) Ist der Satz $\forall x \forall y (Exy \to Eyx) \land \neg \forall x \forall y (Exy \leftrightarrow Eyx)$ erfüllbar? Begründen Sie ihre Antwort.

(b) Eine binäre Relation R heißt...

symmetrisch, wenn aus $(a, b) \in R$ stets $(b, a) \in R$ folgt.

asymmetrisch, wenn aus $(a, b) \in R$ stets $(b, a) \notin R$ folgt.

Es sei $\mathfrak{A} = (A, R)$ eine $\{R\}$-Struktur. Formalisieren Sie jeweils die folgenden Eigenschaften in der Prädikatenlogik.

(i) R ist symmetrisch aber nicht asymmetrisch.

(ii) Es gibt 3 verschiedene Elemente $a_1, a_2, a_3 \in A$, so dass $R \subseteq \{a_1, a_2, a_3\} \times A$.

(iii) Es gibt 100 verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_{100} \in A$, so dass die Relation

$$\{(b, c) \in R \ : \ b, c \notin \{a_1, \ldots, a_{100}\}\} \text{ symmetrisch ist.}$$

(iv) R ist nicht symmetrisch, aber es gibt eine endliche Substruktur $\mathfrak{B} = (B, R^{\mathfrak{B}}) \subseteq \mathfrak{A}$, so dass $R^{\mathfrak{B}}$ sowohl symmetrisch als auch asymmetrisch ist.

(c) Sei $\mathfrak{A} := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap^{\mathfrak{A}})$, wobei wie üblich $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ bezeichne und $\cap^{\mathfrak{A}}$ die zweistellige Funktion ist, die den Durchschnitt zweier Mengen beschreibt.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Relationen bzw. Konstanten in $\mathfrak{A}$ elementar definierbar sind.

(i) Die Teilmengenrelation $\{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \ : \ A \subseteq B\}$.

Hinweis: In den nachfolgenden Aufgaben dürfen Sie $\subseteq$ in ihren FO-Formeln benutzen, als ob es Teil der Signatur wäre.

(ii) Das Element $\varnothing$ von $\mathfrak{A}$.

(iii) Die Menge $\{\mathbb{N} \setminus \{a\} \ : \ a \in \mathbb{N}\}$.

(iv) Das Element $\{17\}$ von $\mathfrak{A}$.

Aufgabe 4 20 Punkte

(a) Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ τ-Strukturen. Ergänzen Sie: Wenn $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, dann heißen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$...

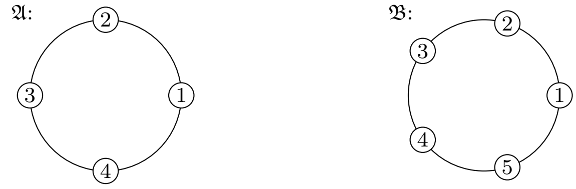
Vervollständigen Sie nun die Definition: Es gilt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, genau dann, wenn ...

(b) Was besagt der Satz von Ehrenfeucht und Fraïssé?

(c) Betrachten Sie die folgenden Paare von Strukturen. Welche sind isomorph? Welche sind elementar äquivalent bzw. was ist die maximale Zahl m, so dass $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$? Begründen Sie ihre Antworten.

(i) $\mathfrak{A} := (\mathbb{R}, P^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{R}, P^{\mathfrak{B}})$ wobei $P^{\mathfrak{A}} := \mathbb{Q}$ und $P^{\mathfrak{B}} := \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0\}$.

(ii) $\mathfrak{A} \coloneqq (\{1, \ldots, 4\}, E^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} \coloneqq (\{1, \ldots, 5\}, E^{\mathfrak{B}})$ wobei die Relationen wie folgt sind:



(iii) $\mathfrak{A} \coloneqq (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} \coloneqq (\{X \subseteq \mathbb{N} \ : \ 2n+1 \in X \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}, \cap^{\mathfrak{B}})$, wobei

- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ bezeichnet,
- $\cap^{\mathfrak{A}}$ und $\cap^{\mathfrak{B}}$ zweistellige Funktionen sind, die Durchschnitte von Mengen beschreiben.

Aufgabe 5 15 Punkte

Geben Sie für die folgenden Klassen jeweils ein, wenn möglich endliches, Axiomensystem an oder beweisen Sie, dass ein solches nicht existiert.
Hinweis: Sie dürfen die (endlichen) Axiomensysteme $\Phi_<$ und Φ_{Graph} für lineare Ordnungen bzw. ungerichtete Graphen benutzen.

(a) Die Klasse aller $\{P, Q\}$-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, P^{\mathfrak{A}}, Q^{\mathfrak{A}})$ mit $|P^{\mathfrak{A}}| + |Q^{\mathfrak{A}}| = 1$, wobei P,Q einstellige Relationen sind.

(b) Die Klasse aller $\{P, Q\}$-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, P^{\mathfrak{A}}, Q^{\mathfrak{A}})$ mit $|P^{\mathfrak{A}}| \cdot |Q^{\mathfrak{A}}| = 1$ und $A = \mathbb{R}$, wobei P,Q einstellige Relationen sind.

(c) Die Klasse aller ungerichteten Graphen $\mathfrak{G} = (V, E)$, in denen es unendlich viele Kanten gibt.

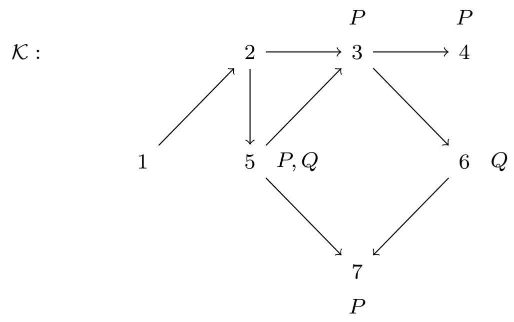
(d) Die Klasser aller ungerichteten Graphen $\mathfrak{G} = (V, E)$, in denen es beliebig lange endliche Pfade, aber keinen unendlichen Pfad gibt. (*Bem.:* Nach Definition hat ein *Pfad* keine Knotenwiederholungen.)

(e) Die Klasse aller abzählbar unendlichen linearen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <)$, die ein maximales Element haben.

Aufgabe 6 11 Punkte

(a) Sei $\varphi := \Diamond\Box(\Diamond P \to \Diamond Q)$. Geben Sie die Menge $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{K}}$ an. Geben Sie zudem eine kurze Begründung für Ihre Entscheidung an.

Zur Erinnerung: $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{K}} := \{v \in V_{\mathcal{K}} \ : \ \mathcal{K}, v \models \varphi\}$.



(b) Was bedeutet es, dass die Modallogik die *Baummodell-Eigenschaft* hat?

(c) Geben Sie für folgende Sachverhalte eine Formel der Modallogik (mit nur einer Aktion und zwei atomaren Eigenschaften P und Q) an, oder zeigen Sie, dass es keine solche Formel geben kann. Ein P-, bzw. Q-, Nachfolger w von v ist ein entsprechend beschrifteter Knoten mit $(v, w) \in E$.

(i) Jeder Nachfolger von v ist genau dann mit Q beschriftet, wenn er einen (weiteren) P-Nachfolger hat.

(ii) Wenn v einen P-Vorgänger hat, dann auch einen P-Nachfolger.

(iii) Wenn v zwei Q-Nachfolger hat, dann auch einen P-Nachfolger.

(iv) Alle (maximal langen[1]) Pfade, ausgehend von den P-Nachfolgern von v, haben Länge genau 2.

[1] Ein unendlicher Pfad gilt hier als maximal lang.