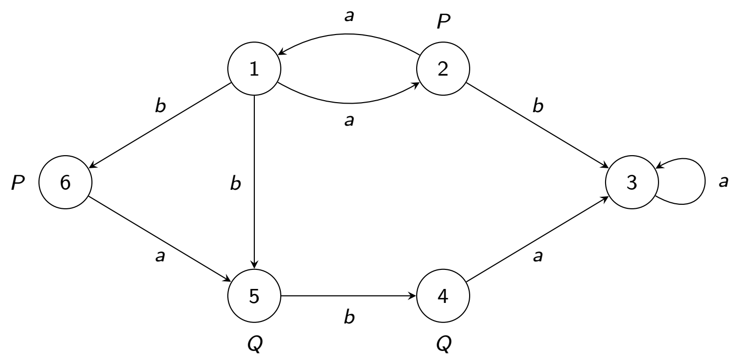
Aufgabe 1

Gegeben sei das Transitionssystem $\mathcal{K} = (\{1, \ldots, 6\}, E_a, E_b, P, Q)$ mit zweistelligen Relationen E_a, E_b und einstelligen Relationen P, Q, wie folgt:



(a) Geben Sie für jede der folgenden FO-Formeln $\varphi(x)$ die Menge der v an, für die $\mathcal{K} \models \varphi(v)$ gilt:

(i) $\varphi_1(x) := \forall y(E_a xy \to \neg Py)$;

(ii) $\varphi_2(x) := \exists y(E_a xy \wedge \forall z \neg E_b yz)$;

(iii) $\varphi_3(x) := \forall y\Big((E_a xy \vee E_b xy) \to \big(Qy \wedge \exists z(E_a zy \wedge Pz)\big)\Big)$.

(b) Geben Sie eine FO-Formel $\psi(x)$ an, so dass $\mathcal{K} \models \psi(v)$ gdw. $v \in \{2, 5, 6\}$.

Aufgabe 2

Wir betrachten endliche Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.
Ein Wort $w = w_0 \cdots w_{n-1}$ entspricht der Struktur

$$\mathfrak{w} := (\{0, \cdots, n-1\}, <, P_a, P_b, P_c),$$

wobei $<$ die übliche lineare Ordnung ist, und $i \in P_j$ genau dann gilt, wenn $w_i = j$.
Geben Sie die Menge aller Wörter $w \in \Sigma^*$ an, für die gilt

$$\mathfrak{w} \models (\forall x\,(P_a x \to \exists y\,(x < y \wedge P_b y))) \to (\forall x\, P_c x \to \forall y\,(x \neq y \to \neg P_c y))$$

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils einen FO($\{<, P_a, P_b, P_c\}$)-Satz an, der diese definiert.

(a) $\{w \in \Sigma^* \ : \ w_0 = a$ und $w_{n-1} = b$ wobei $n = |w|\}$

(b) $\{w \in \Sigma^* \ : \ $*abba* kommt als Infix in w vor$\}$

(c) $\{w \in \Sigma^* \ : \ $*ba* kommt *nicht* als Infix in w vor$\}$

(d) $\{w \in \{a, b\}^* \ : \ $*ba* kommt *nicht* als Infix in w vor$\}$ Verwenden Sie nur zwei Quantoren.