Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

SS 2019

1. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 16.04., um 14:00 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, 1. Stock) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum[1] der Veranstaltung unter „E-Tests“ zu absolvieren. Um Zugriff auf den Lernraum zu erhalten, melden Sie sich in RWTHonline zum Tutorium an. Falls Sie sich aufgrund Ihres Studiengangs oder wegen Fehlern in RWTHonline nicht anmelden können, schreiben Sie eine E-Mail mit Ihrer Matrikelnummer an pago@logic.rwth-aachen.de.

Aufgabe 2 1 + 8 + 3 Punkte

Sie stehen vor der Wahl, ob Sie auf Ihrem Rechner Widnows, Mac OS oder Linux installieren. Sie wissen darüber folgendes:

(i) Auf dem Computer wird genau eines der drei Systeme Windows, Mac OS oder Linux laufen.

(ii) Wenn Sie keinen Grafiktreiber haben und versuchen, ein Computerspiel zu starten, kommt es zum Systemabsturz.

(iii) Wenn Sie Ihre Hausaufgaben machen wollen, brauchen Sie einen Druckertreiber und eine Konsole.

(iv) Aufgrund der beschränkten Treiberverfügbarkeit unter Linux können Sie höchstens einen der beiden Treiber installieren, wenn Sie Linux benutzen.

(v) Windows hat keine Konsole.

(vi) Entweder machen Sie Ihre Hausaufgaben und spielen Computer, oder Sie machen gar nichts von beidem, da Sie lieber draußen das schöne Wetter genießen.

(vii) Wenn Sie Ihre Hausaufgaben nicht machen, kommt es zum Systemabsturz, da Ihre Eltern Ihnen den Stecker ziehen.

(viii) Sie wollen keinen Systemabsturz.

Finden Sie durch geeignete Formalisierung in der Aussagenlogik heraus, welches das einzig mögliche Betriebssystem ist, das Sie benutzen können. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Definieren Sie eine geeignete Variablenmenge und deren intendierte Semantik. Unterscheiden Sie durch Ihre Notation explizit zwischen Syntax und Semantik.

(b) Formalisieren Sie die Bedingungen in der Aussagenlogik, indem Sie für jede Bedingung eine aussagenlogische Formel angeben.

[1] https://moodle.rwth-aachen.de/course/view.php?id=1662

(c) Ermitteln Sie die Modelle Ihrer Formel. Argumentieren Sie dabei semantisch, d.h. mit Hilfe von Interpretationen (insbesondere nicht über Wahrheitstabellen) und folgern Sie, welches Betriebssystem Sie benutzen müssen.

Aufgabe 3 5 · 2 Punkte

Wir definieren den Junktor „$\leftrightarrow$“ durch $[\![\varphi \leftrightarrow \psi]\!]^{\mathfrak{I}} := 1$ gdw. $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}}$.

(a) Sind folgende Formeln Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar? Argumentieren Sie mittels Interpretationen, benutzen Sie keine Wahrheitstabellen!

(i) $(A \to B) \wedge (C \leftrightarrow \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee B)$

(ii) $((S \leftrightarrow T) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)) \to ((A \to S) \wedge (B \to T))$

(iii) $((A \vee C) \wedge B \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C) \to (A \wedge \neg A)$

(b) Zeigen Sie durch Äquivalenzumformungen, dass folgende Formeln logisch äquivalent sind.

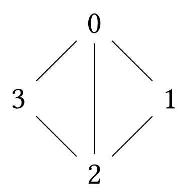
(i) $A \vee (B \wedge C)$ und $(\neg A \to B) \wedge (A \vee C)$

(ii) $A \wedge B$ und $B \wedge (((S \to C) \wedge A) \vee (A \wedge B))$

Aufgabe 4 1+2+5 Punkte

Wir ordnen einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{0, \ldots, n-1\}$ die Interpretation $\mathfrak{I}_G$ über der Variablenmenge $\tau_n = \{X_{ij} : 0 \leq i < j < n\}$ zu, sodass $\mathfrak{I}_G(X_{ij}) = 1$ genau dann, wenn $\{i, j\} \in E$.

(a) Geben Sie eine Formel φ mit $\tau(\varphi) = \tau_4$ an, so dass $\mathfrak{I}_G \models \varphi$ exakt für folgenden Graphen gilt:



(b) Konstruieren Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}^{>0}$ eine Formel φ_n, so dass für alle ungerichteten Graphen G mit Knotenmenge $\{0, \ldots, n-1\}$ genau dann $\mathfrak{I}_G \models \varphi_n$ gilt, wenn G der vollständige Graph auf n Knoten ist.

(c) Konstruieren Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}^{>0}$ eine Formel φ_n, so dass für alle ungerichteten Graphen G mit Knotenmenge $\{0, \ldots, n-1\}$ genau dann $\mathfrak{I}_G \models \varphi_n$ gilt, wenn G ein Independent Set der Größe $\geq n/2$ hat (ein Independent Set ist eine Teilmenge der Knoten $I \subseteq V$, sodass für alle Knotenpaare $(i, j) \in I^2$ gilt: $\{i, j\} \notin E$).

Aufgabe 5 3 + 3 + 3 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen funktional vollständig sind.

(a) $\{0, \oplus\}$

(b) $\{*\}$, wobei $x_1 * x_2 := \neg x_1 \wedge \neg x_2$.

(c) $\{f, 1\}$, wobei $f(x_1, x_2, x_3) := \begin{cases} x_1 \oplus x_2 & , x_3 = 0 \\ x_1 \wedge x_2 & , x_3 = 1 \end{cases}$

Aufgabe 6* 5* Punkte

Sei $\psi \to \varphi$ eine aussagenlogische Tautologie. Wir nennen ϑ eine *Interpolante* für $\psi \to \varphi$, wenn $\psi \to \vartheta$ und $\vartheta \to \varphi$ Tautologien sind und $\tau(\vartheta) \subseteq \tau(\psi) \cap \tau(\varphi)$. Zeigen Sie, dass eine Interpolante ϑ existiert.

Hinweis: Konstruieren Sie die Interpolante aus Formeln $\psi[\bar{x} \mapsto \bar{v}]$. Hierbei ist $\bar{x} := \tau(\psi) \setminus \tau(\varphi)$ und $\bar{v} \in \{0,1\}^{|\bar{x}|}$, und $\psi[\bar{x} \mapsto \bar{v}]$ ist die Formel, die aus ψ entsteht, indem alle Vorkommnisse von x_i durch v_i ersetzt werden.