Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

SS 2019

10. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 25.06., um 14:00 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, 1. Stock) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1 6 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im Moodle-Lernraum[1].

Aufgabe 2 4+4+2 Punkte

Sei $\tau = \{0, 1, f, R\}$, wobei 0, 1 Konstantensymbole seien, f ein zweistelliges Funktionssymbol, und R ein einstelliges Relationssymbol. Wir bezeichnen nun mit G_τ die Menge der Grundterme über τ. Sei T die folgende Menge von atomaren Sätzen:

$$T := \{Rf01\} \cup \{fft_1t_2t_3 = ft_1ft_2t_3 \mid t_1, t_2, t_3 \in G_\tau\} \cup \{ft0 = t \mid t \in G_\tau\} \cup \{f0t = t \mid t \in G_\tau\}.$$

Sei Σ die kleinste Menge, die T enthält und unter Substitution abgeschlossen ist, sowie $\sim$ die von Σ induzierte Kongruenzrelation auf der Herbrandstruktur $\mathfrak{H}(\Sigma)$.

(a) Beschreiben Sie Σ, d.h. geben Sie an, welche atomaren Sätze in Σ enthalten sind.

(b) Beschreiben Sie $\mathfrak{H}(\Sigma)$ und die kanonische Struktur $\mathfrak{A}(\Sigma) := \mathfrak{H}(\Sigma)_{/\sim}$.

(c) Sei $T' := T \cup \{\forall x(Rx)\}$. (Dann ist Σ auch der Abschluss von T' unter Substitution.) Hat T' ein Modell, und wenn ja, gilt dann auch $\mathfrak{A}(\Sigma) \models T'$?

Aufgabe 3 4+3+3 Punkte

Sei $\mathfrak{A} = (A, <^\mathfrak{A})$ eine $\{<\}$-Struktur, wobei $<^\mathfrak{A}$ auf A eine partielle Ordnung sei, d.h. eine irreflexive, transitive zweistellige Relation. Wir betrachten nun die Unvergleichbarkeitsrelation $\perp_\mathfrak{A}$, die wie folgt definiert ist: $a \perp_\mathfrak{A} b$ gilt für zwei Elemente $a, b \in A$, genau dann wenn weder $a <^\mathfrak{A} b$ noch $b <^\mathfrak{A} a$.
Wir nehmen nun als Zusatzbedingung an die partielle Ordnung $\mathfrak{A}$ an, dass $\perp_\mathfrak{A}$ transitiv ist, d.h. wenn $a \perp_\mathfrak{A} b$ und $b \perp_\mathfrak{A} c$, dann auch $a \perp_\mathfrak{A} c$, für alle Elemente $a, b, c \in A$.

(a) Zeigen Sie, dass $\perp_\mathfrak{A}$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$ ist.

(b) Betrachten Sie die Faktorstruktur $\mathfrak{B} := \mathfrak{A}_{/\perp_\mathfrak{A}}$. Zeigen Sie, dass in $\mathfrak{B}$ die Relation $<^\mathfrak{B}$ wieder irreflexiv und transitiv ist, sowie dass die Unvergleichbarkeitsrelation $\perp_\mathfrak{B}$ auch wieder transitiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass ein erneutes Herausfaktorisieren der Unvergleichbarkeitsrelation die Struktur nicht mehr verändert, d.h. dass $\mathfrak{B}_{/\perp_\mathfrak{B}}$ isomorph zu $\mathfrak{B}$ ist.

Aufgabe 4 6 Punkte

Sei $\mathfrak{A}$ eine endliche oder abzählbar unendliche Struktur. Zeigen Sie, dass man $\mathfrak{A}$ mit höchstens abzählbar unendlich vielen Konstantensymbolen zu einer Struktur $\mathfrak{A}'$ expandieren kann, sodass $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}')$ eine Hintikka-Menge ist.
Dies bedeutet, wie im Skript beschrieben, dass Satzmengen Γ^*, Δ^* existieren, sodass $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}') = \Gamma^* \cup \neg\Delta^*$, und sodass Γ^*, Δ^* die unter Definition 4.17 genannten Bedingungen (1) - (5) erfüllen.

[1] https://moodle.rwth-aachen.de/course/view.php?id=1662