Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

SS 2019

11. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 02.07., um 14:00 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, 1. Stock) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Diese Woche gibt es keinen eTest!

Aufgabe 1 3+4+3 Punkte

(a) Beweisen Sie folgende Aussage: Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Satzmenge und $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ ein Satz mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Phi) = \mathrm{Mod}(\psi)$. Dann existiert eine endliche Teilmenge von Φ, die $\mathcal{K}$ axiomatisiert.

(b) Sei $\mathcal{K} = \{(A, \sim) \mid \sim \text{ ist eine Äquivalenzrelation, und jede Äquivalenzklasse ist unendlich}\}$. Geben Sie ein Axiomensystem für die Klasse $\mathcal{K}$ an.

(c) Zeigen Sie, dass die Klasse $\mathcal{K}$ nicht endlich axiomatisierbar ist, indem Sie Ihre Erkenntnisse aus (a) und (b) verwenden.

Aufgabe 2 4+4 Punkte

Eine *Wohlordnung* $(A, <)$ ist eine lineare Ordnung, sodass jede nichtleere Teilmenge $A' \subseteq A$ ein minimales Element bezüglich $<$ hat. Es gibt also in $(A, <)$ keine unendliche absteigende Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, sodass für alle i gilt: $a_{i+1} < a_i$.
Zeigen Sie, dass die Klasse der Wohlordnungen $(A, <)$ nicht FO-axiomatisierbar ist. Beweisen Sie dies auf zwei verschiedene Weisen:

(a) Benutzen Sie den Kompaktheitssatz.

(b) Betrachten Sie ein geeignetes Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel: Geben Sie an, auf welchen Strukturen Sie das Spiel spielen möchten, und erklären Sie grob die Gewinnstrategie der Duplikatorin (die technischen Details können Sie vernachlässigen).

Aufgabe 3 18 Punkte

Geben Sie für die folgenden Klassen von Strukturen jeweils ein – wenn möglich endliches – Axiomensystem an. Im Fall, dass die Klasse nicht (endlich) axiomatisierbar ist, beweisen Sie dies mit einer Methode Ihrer Wahl.

(a) Die Klasse der endlichen partiellen Ordnungen $(A, <)$.

(b) Die Klasse der unendlichen partiellen Ordnungen $(A, <)$.

(c) Die Klasse der unendlichen linearen Ordnungen $(A, <)$.

(d) Die Klasse $\{(A, R) \mid |R| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|\}$.

(e) Die Klasse aller zu $\mathfrak{H}$ isomorphen Strukturen, wobei $\mathfrak{H}$ die Herbrandstruktur zur Signatur $\tau := \{0, h\}$ sei; hierbei sei 0 ein Konstantensymbol und h ein fünfstelliges Funktionssymbol.

(f) Die Klasse $\{(A, \cdot, 1) \mid (A, \cdot, 1) \equiv_3 (\mathbb{Q}, \cdot, 1)\}$.

(g) Die Klasse aller ungerichteten Graphen G, sodass die Klasse aller zu G isomorphen Graphen endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 4 10* Punkte

Sei $\mathrm{Str}(\tau)$ die Klasse aller τ-Strukturen, $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Str}(\tau)$ eine Klasse von τ-Strukturen und $\overline{\mathcal{K}} := \{\mathfrak{A} \in \mathrm{Str}(\tau) \mid \mathfrak{A} \notin \mathcal{K}\}$ ihr Komplement. Zeigen Sie den folgenden Satz:
Die Klasse $\mathcal{K}$ ist endlich axiomatisierbar, genau dann wenn $\mathcal{K}$ und $\overline{\mathcal{K}}$ beide FO-axiomatisierbar sind.
Hinweis: Benutzen Sie den Kompaktheitssatz und betrachten Sie die Menge $\Phi_{\mathcal{K}} \cup \Phi_{\overline{\mathcal{K}}}$, wobei $\Phi_{\mathcal{K}}$ und $\Phi_{\overline{\mathcal{K}}}$ Axiomensysteme für die entsprechenden Klassen sind.