

## 12. Übung Mathematische Logik

**Abgabe:** bis Dienstag, den 09.07., um 14:00 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, 1. Stock) oder in der Vorlesung.

**Ihre korrigierte Übung können Sie ab dem 15.07. bei Benedikt Pago (Raum 4114a) abholen. Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.**  
 Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

### Aufgabe 1

5 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im Moodle-Lernraum<sup>1</sup>.

### Aufgabe 2\*

10\* Punkte

Zeigen Sie, dass das Erfüllbarkeitsproblem für FO-Formeln entscheidbar ist, deren Signatur nur aus einstelligen Relationssymbolen besteht, indem Sie einen Algorithmus dafür angeben.

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass jede erfüllbare Formel mit Quantorenrang  $m$  und  $q$  einstelligen Relationssymbolen ein Modell mit höchstens  $m \cdot 2^q$  Elementen besitzt.

### Aufgabe 3\*

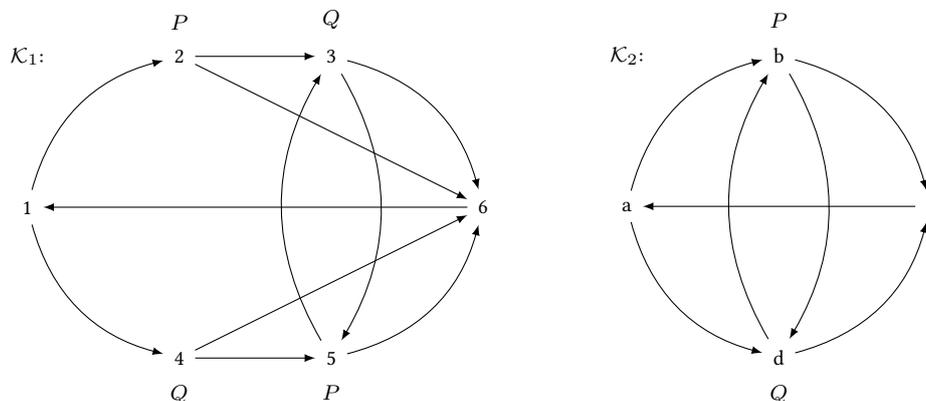
5\* Punkte

Seien  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  zwei Kripkestrukturen. Zeigen Sie, dass es eine bzgl.  $\subseteq$  maximale Bisimulation  $Z$  zwischen  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  gibt, d.h. für alle Bisimulationen  $Z'$  zwischen den beiden Strukturen gilt  $Z' \subseteq Z$ .

### Aufgabe 4\*

10\* Punkte

Geben Sie die maximale Bisimulation  $Z$  zwischen  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  an. Begründen Sie für alle  $(v, w) \notin Z$ , dass diese nicht Teil der Bisimulation sind.



### Aufgabe 5

11 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir nur Transitionssysteme der Form  $\mathcal{K} = (V, E, P, Q)$ , wobei  $E$  die (einzige) Kantenbeziehung ist und  $P, Q \subseteq V$  die atomaren Eigenschaften sind. Ist  $v \in V$ , so nennen wir  $w \in V$  einen  $P$ -Nachfolger (bzw.  $Q$ -Nachfolger) von  $v$ , wenn  $(v, w) \in E$  und  $w \in P$  (bzw.  $w \in Q$ ) gilt.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Eigenschaften von Transitionssystemen mit ausgewählten Knoten  $v$  in der Modallogik definierbar sind.

<sup>1</sup><https://moodle.rwth-aachen.de/course/view.php?id=1662>

- (a) Kein  $P$ -Nachfolger von  $v$  besitzt einen  $Q$ -Nachfolger.
- (b)  $v$  hat einen  $Q$ -Nachfolger mit mindestens 2 verschiedenen  $P$ -Nachfolgern.
- (c)  $v$  hat einen Nachfolger, der zu genau den Knoten eine Kante hat, die keine Kante zu sich selbst haben.
- (d) Der Knoten  $v$  besitzt eine Selbstkante.
- (e) Von jedem Nachfolger von  $v$  geht kein Pfad der Länge 4, aber ein Pfad der Länge 3 aus.  
*Hinweis:* Auf einem Pfad dürfen Wiederholungen von Knoten auftreten.