Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

SS 2019

2. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 23.04., um 14:00 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, 1. Stock) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1 — 8 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im Moodle-Lernraum[1].

Aufgabe 2 — 3 Punkte

Betrachten Sie das folgende Problem, das wir als Party bezeichnen wollen:

Eine Instanz von Party besteht aus einer Gästeliste L von n paarweise verschiedenen Namen und einer als Tabelle gegebenen Abbildung $F : L \to \mathcal{P}(L)$, die jeder Person ihren Freundeskreis zuordnet. Zusätzlich ist eine Liste $Z \subseteq L$ von definitiven Zusagen gegeben.
Jede Person in Z kommt zur Party. Wenn für eine Person p ihr ganzer Freundeskreis $F(p)$ zur Party kommt (und $F(p) \neq \emptyset$), so wird auch p mitkommen.
Gesucht ist die minimale Menge an Personen, die - nach o.g. Regeln - zur Party erscheinen werden.

Zeigen Sie mit Methoden der Aussagenlogik, dass es einen Polynomialzeit-Algorithmus für Party gibt.

Aufgabe 3 — 8 Punkte

Im Folgenden bezeichnen Φ, Ψ und Θ beliebige aussagenlogische Formelmengen und $\varphi, \psi, \vartheta \in \mathrm{AL}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

(a) Wenn $\Phi \models \neg\varphi$ und $\varphi \in \Phi$, dann ist Φ unerfüllbar.

(b) Wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \vartheta$ dann auch $\varphi \models \vartheta$.

(c) Wenn $\Phi \models \psi$ für alle $\psi \in \Psi$ und $\Psi \models \varphi$, dann auch $\Phi \models \varphi$.

(d) Aus ($\Phi \models \varphi$ gdw. $\Psi \models \psi$) folgt ($\Phi \cup \Theta \models \varphi$ gdw. $\Psi \cup \Theta \models \psi$).

(e) Sei $\Phi_0 \supseteq \Phi_1 \supseteq \cdots$ und $\Phi_n \models \varphi$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n \models \varphi$.

Aufgabe 4 — 2+3+5* Punkte

(a) Prüfen Sie mit Hilfe des Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung, ob die folgende Formel erfüllbar ist. Geben Sie als Zwischenschritte die Mengen der markierten Variablen an.

$$(X \wedge Y \to 0) \wedge (E \wedge F \to Z) \wedge (1 \to X) \wedge (1 \to F) \wedge (X \to E) \wedge (Z \to G)$$
$$\wedge (E \wedge G \wedge X \to H) \wedge (H \to E) \wedge (X \wedge F \wedge H \to Y)$$

[1] https://moodle.rwth-aachen.de/course/view.php?id=1662

(b) Für zwei Interpretationen $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2 : \tau \to \{0,1\}$ definieren wir den Schnitt $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2$ als $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2(X) := \min(\mathfrak{I}_1(X), \mathfrak{I}_2(X))$

Beweisen Sie, dass Modelle von Horn-Formeln unter Schnitt abgeschlossen sind, also dass für jede Horn-Formel φ gilt: Ist $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ und $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$, dann ist auch $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 \models \varphi$.

(c)* Beweisen Sie die Umkehrung von (b), d.h. dass jede Formel, deren Modelle unter Schnitt abgeschlossen sind, logisch äquivalent zu einer Horn-Formel ist.

Aufgabe 5 10+3 Punkte

Wir betrachten das bipartite Matching-Problem: Gegeben sei ein ungerichteter bipartiter Graph $G = (V, E)$, wobei $V = S \dot\cup T$ und $E \subseteq \{\{u, v\} : u \in S, v \in T\}$. Ein Matching von G ist eine Kantenmenge $M \subseteq E$, sodass für jeden Knoten $v \in V$ maximal eine zu v inzidente Kante in M ist. Wir sagen, dass ein Matching M die Partition S abdeckt, wenn zu jedem Knoten $v \in S$ eine zu v inzidente kante in M ist.

Der Satz von Hall (auch Heiratssatz genannt) formuliert eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz eines Matchings, das die Partition S abdeckt:

Sei G wie oben ein bipartiter endlicher Graph. In G existiert ein Matching, das S abdeckt, genau dann wenn für jede Teilmenge $H \subseteq S$ gilt: $|N(H)| \geq |H|$.
Hierbei bezeichnet $N(H)$ die Nachbarschaft von H in G, also
$N(H) := \{x \in V \mid \text{es gibt } y \in H \text{ mit } \{x, y\} \in E\}$.

Wir wollen versuchen, den Satz von Hall auf unendliche Graphen zu verallgemeinern. Dazu machen wir die Einschränkung, dass der Grad jedes Knotens endlich sein muss.

(a) Sei $G = (V, E)$ mit $V = S \dot\cup T$ ein unendlicher bipartiter (ungerichteter) Graph, bei dem der Grad jedes Knotens endlich ist. Zeigen Sie: In G existiert ein Matching, das S abdeckt, genau dann wenn für jede endliche Teilmenge $H \subseteq S$ gilt: $|N(H)| \geq |H|$.

Hinweis: Nutzen Sie den Kompaktheitssatz und den o.g. Satz von Hall für endliche Graphen.

(b) Zeigen Sie, dass die Beschränkung auf endlichen Knotengrad nicht weggelassen werden kann. Konkret: Geben Sie einen unendlichen bipartiten Graphen an, bei dem für jede endliche Teilmenge $H \subseteq S$ gilt: $|N(H)| \geq |H|$, der aber trotzdem kein Matching besitzt, das S abdeckt (der Graph muss einen Knoten mit unendlichem Grad enthalten).