Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

SS 2019

3. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 30.04., um 14:00 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, 1. Stock) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1 7 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im Moodle-Lernraum[1].

Aufgabe 2 4 + 4 + 4 Punkte

Verwenden Sie die Resolutionsmethode, um die nachfolgenden Aussagen zu zeigen oder zu widerlegen.

(a) $(\neg Y \wedge \neg X) \vee (Y \wedge X) \vee \neg(Z \rightarrow Y) \vee (\neg X \wedge \neg W) \vee ((W \vee \neg Z) \wedge (W \vee \neg Y))$ ist eine Tautologie.

(b) $\{B \wedge A \rightarrow D, U \rightarrow C, B, B \wedge C \rightarrow A, D \wedge A \wedge C \rightarrow U\} \models \neg C \vee (B \wedge U \wedge W)$.

(c) $\{\neg X \vee Z\ , Y \vee X \vee Z \vee \neg U\ , \neg Y \vee X\ , \neg Z \vee V\ , Y \vee Z \vee U\} \models Z \wedge V$.

Aufgabe 3 2 + 2 Punkte

Wir definieren die *Doppelresolution* analog zum Resolutionsverfahren aus der Vorlesung, jedoch mit einem neuen Resolventenbegriff: Seien C, C_1, C_2 Klauseln. C heißt *Doppelresolvente* von C_1 und C_2, falls es (nicht notwendigerweise verschiedene) Literale Y, Z gibt, so dass $\{Y, Z\} \subseteq C_1$, $\{\overline{Y}, \overline{Z}\} \subseteq C_2$ und

$$C = (C_1 \setminus \{Y, Z\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{Y}, \overline{Z}\})\,.$$

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Der Doppelresolutionskalkül ist vollständig.

(b) Der Doppelresolutionskalkül ist korrekt.

Aufgabe 4 4 + 1 Punkte

Im Allgemeinen können Resolutionswiderlegungen von Klauselmengen exponentiell groß sein. Wir betrachten nun den Spezialfall, in dem jede Klausel höchstens zwei Literale enthält. Zeigen Sie, dass unter dieser Voraussetzung die Resolutionsmethode ein effizienter Erfüllbarkeitstest ist: Geben Sie eine obere Schranke für die Anzahl der Resolutionsschritte an, die der Resolutionsalgorithmus auf solchen Klauselmengen braucht. Geht das auch für Klauselmengen mit höchstens drei Literalen pro Klausel?

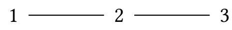
Aufgabe 5 1+7 Punkte

Ein Graph $G = (V, E)$ ist homomorph zu einem Graphen $H = (V', E')$, wenn es eine Funktion $f : V \rightarrow V'$ gibt, sodass für jede Kante $(u, v) \in E$ in G auch $(f(u), f(v)) \in E'$ eine Kante in H ist.

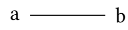
(a) Seien G und H wie unten angegeben. Geben Sie eine Funktion $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b\}$ an, die zeigt, dass H zu G homomorph ist.

[1] https://moodle.rwth-aachen.de/course/view.php?id=1662

H:



G:



(b) Sei H ein endlicher Graph. Zeigen Sie, dass ein unendlicher Graph G genau dann homomorph zu H ist, wenn jeder endliche Untergraph von G homomorph zu H ist.