Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

SS 2019

5. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 14.05., um 14:00 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, 1. Stock) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1 10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im Moodle-Lernraum[1].

Aufgabe 2 3 + 3 Punkte

(a) Geben Sie für die Strukturen $\mathfrak{N}_1 = (\mathbb{N}, \leq)$ und $\mathfrak{N}_2 = (\mathbb{N}, f)$ jeweils alle Substrukturen an, wobei $\leq^{\mathfrak{N}_1}$ die übliche Ordnung ist, und $f^{\mathfrak{N}_2}(n) = n + 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Geben Sie alle Substrukturen der Strukturen $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ sowie $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ (mit Addition modulo 5 bzw. 4) an.

Aufgabe 3 10 Punkte

Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, -^{\mathfrak{R}}, \mathrm{sq}^{\mathfrak{R}})$ wobei $-^{\mathfrak{R}}$ die übliche Subtraktion zweier reeller Zahlen und $\mathrm{sq}^{\mathfrak{R}}(x) = x^2$ die Quadratfunktion beschreibt. Geben Sie $\mathrm{FO}(\{-, \mathrm{sq}\})$ Formeln an, die folgende Sachverhalte beschreiben. Achten Sie dabei besonders auf die freien Variablen in Ihren Formeln. Beschreiben Sie die Idee Ihrer Formel knapp.

(a) $x = -y$

(b) $x < y$

(c) $x \in (-1, 1)$

(d) $x \cdot y = z$

Hinweis: Wenn Sie eine Formel definiert haben, können Sie diese in den anderen Teilaufgaben verwenden. Für Aufgabe (d) denken Sie an die binomischen Formeln.

Aufgabe 4 10 Punkte

Sei $\tau = \{E, R, G, B\}$, wobei E ein zweistelliges Relationssymbol und R, G und B einstellige Relationssymbole seien. Wie auf Seite 55 im Skript beschrieben ist, kann die Klasse aller ungerichteten Graphen als Modelklasse der Formelmenge

$$\Phi_{\text{Graph}} = \{\forall x \neg Exx, \forall x \forall y (Exy \to Eyx)\}$$

aufgefasst werden. Wir wollen nun ungerichtete Graphen betrachten, bei denen die Knoten zusätzlich Farben R,G und B erhalten können. Axiomatisieren Sie die folgenden Klassen von ungerichteten Graphen (mit potentiell gefärbten Knoten), indem Sie das Axiomensystem Φ_{Graph} um geeignete $\mathrm{FO}(\tau)$-Formeln erweitern.

[1] https://moodle.rwth-aachen.de/course/view.php?id=1662

(a) Die Klasse aller ungerichteten Graphen mit einer gültigen *Drei-Färbung*, d.h.: Jeder Knoten hat genau eine der Farben R, G, B, und wenn zwei Knoten durch eine Kante verbunden sind, sind ihre Farben verschieden.

(b) Die Klasse aller ungerichteten Graphen, bei denen jeder Knoten entweder keine Farbe hat oder rot ist (Relationssymbol R) und die Menge der roten Knoten ein *inklusionsmininmales Vertex Cover* für den Graphen darstellt. (Ein *Vertex Cover* ist eine Teilmenge C der Knoten, sodass für jede Kante mindestens einer ihrer Endpunkte in C ist. Ein Vertex Cover C ist *inklusionsminimal*, wenn keine echte Teilmenge von C ein Vertex Cover ist.)

(c) Die Klasse aller ungerichteten Graphen, die isomorph zu folgendem Graphen sind und die die Relationssymbole R, G, B beliebig interpretieren: