Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

SS 2019

6. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 21.05., um 14:00 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, 1. Stock) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1 — 9 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im Moodle-Lernraum[1].

Aufgabe 2 — 4+4 Punkte

Formen Sie folgende Formeln zunächst in Negations-, dann in Pränex- und schließlich in Skolem-Normalform um. **Hierbei seien a, b Konstantensymbole.**

(a) $\varphi := [\exists x \forall y(fxfyb = fxa) \lor \forall x(fxa = x)] \to \forall y \exists x(x = y)$

(b) $\psi := \forall u \forall v\big(\neg\neg(Svu \land \exists v Rva) \lor \exists w \neg(fwu \neq v \lor \exists x Rvx)\big)$.

Aufgabe 3 — 3 + 3 Punkte

(a) Konstruieren Sie einen erfüllbaren Satz, dessen Modelle alle unendlich groß sind. Finden Sie dazu eine geeignete Signatur.

(b) Sei c ein Konstantensymbol, sowie E ein zweistelliges Relationssymbol. Konstruieren Sie eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\{E, c\})$, sodass für alle Graphen $\mathfrak{G} = (V, E^{\mathfrak{G}})$ gilt: In $(V, E^{\mathfrak{G}})$ gibt es einen Knoten, von dem aus Pfade beliebiger (endlicher) Länge existieren, genau dann wenn $\mathfrak{G}$ Redukt einer Struktur $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H} \models \Phi$ ist (Ein Knoten, von dem aus Pfade beliebiger Länge existieren, ist ein Knoten v, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Pfad existiert, der in v beginnt und mindestens Länge n hat. Beachte: Die Knoten eines Pfades müssen paarweise verschieden sein).

Aufgabe 4 — 10 Punkte

Seien $E, <$ zweistellige, A, B einstellige Relationssymbole und f ein einstelliges Funktionssymbol. Geben Sie ein – wenn möglich endliches – Axiomensystem für die folgenden Strukturklassen an.

(a) $\mathcal{K}_a = \{(U, <) : <$ ist eine lineare Ordnung, die weder diskret, noch dicht ist$\}$

(b) $\mathcal{K}_b = \{(U, f, A) : A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^{\geq 1}} f^n(U)\}$[2]

(c) $\mathcal{K}_c = \{(U, E, A, B) : E$ ist der Graph einer bijektiven Funktion von A nach $B\}$

(d) $\mathcal{K}_d = \{(U, E) : (U, E)$ ist ein ungerichteter Graph mit beliebig großen endlichen Kreisen$\}$

(e) $\mathcal{K}_e = \{(U, E, f) \mid E$ ist eine Kongruenzrelation von $(U, f)\}$, wobei eine Kongruenzrelation eine Äquivalenzrelation ist, die verträglich mit den Funktionen ist, also hier: Wenn a und b äquivalent sind, dann sind auch $f(a)$ und $f(b)$ äquivalent.

[1] https://moodle.rwth-aachen.de/course/view.php?id=1662
[2] f^n bezeichnet die n-fache Anwendung von f.

Aufgabe 5 8 Punkte

Sei τ eine beliebige Signatur, sowie $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ und $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die Gültigkeit der Aussage:

(a) Ist $\varphi \not\equiv \psi$, so gilt $\Phi \not\models \varphi$ oder $\Phi \not\models \neg(\varphi \wedge \psi)$.

(b) Wenn $\Phi \models \varphi$ und $\forall x \varphi \models \forall x \psi$, dann gilt bereits $\Phi \models \psi$.

(c) Wenn $x \notin \mathrm{frei}(\Phi)$ und $\Phi \models \varphi$, so gilt $\Phi \models \forall x\, \varphi$.

(d) Wenn $\Phi \models \exists x \varphi$ und $\varphi \equiv \psi$, dann auch $\Phi \models \psi$.