Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

SS 2019

8. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 04.06., um 14:00 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, 1. Stock) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1 — 9 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im Moodle-Lernraum[1].

Aufgabe 2 — 3+4+3 Punkte

Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Theorie. T heißt *vollständige Erweiterung* einer Theorie $T' \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$, falls T vollständig ist und $T' \subseteq T$ gilt. $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ heißt *(endlich) axiomatisierbar*, falls es eine (endliche) Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ mit $\mathrm{Mod}(\Phi) = \mathrm{Mod}(T)$ gibt. In diesem Fall nennt man Φ ein *Axiomensystem* für T.

(a) Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Theorie. Zeigen Sie, dass T genau dann vollständig ist, wenn $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ für eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt.

(b) Geben Sie jeweils ein Axiomensystem für T und für jede vollständige Erweiterung von T an.

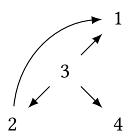
  (i) Die Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\{E\})$ der ungerichteten Graphen (V, E) mit $|V| = 4$.

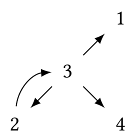
  (ii) Die Theorie $T = \{\varphi \in \mathrm{FO}(\varnothing) \mid \varphi \text{ ist Tautologie}\}$ aller Mengen (A).

(c) Sei T eine endlich axiomatisierbare Theorie mit nur endlich vielen vollständigen Erweiterungen $T_1, \ldots, T_n$. Zeigen Sie, dass dann auch jede der Theorien $T_1, \ldots, T_n$ endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 3 — 7 + 4 Punkte

(a) Geben Sie jeweils die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$, für die $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$ gilt, an, oder zeigen Sie, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Geben Sie im ersten Fall einen trennenden Satz φ vom Quantorenrang m, sowie Gewinnstrategien für den Herausforderer bzw. die Duplikatorin im Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ bzw. $\mathcal{G}_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an.

  (i) $\mathfrak{A} =$ 

, $\mathfrak{B} =$ 

.

  (ii) $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, S^{\mathfrak{A}})$, $\mathfrak{B} = (\mathbb{Z}, S^{\mathfrak{B}})$, wobei $S^{\mathfrak{A}} := \{(a, a+1) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ und $S^{\mathfrak{B}} := \{(a, a+2) \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte vollständig ist.

Aufgabe 4 — 2+2+3+3* Punkte

Sei $\tau = \{a_1, a_2, a_3\}$, wobei dies alles Konstantensymbole seien. Wir fixieren ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 6$ und setzen $A := \{1, 2, ..., m\}$. Betrachten Sie die τ-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, a_1^{\mathfrak{A}}, a_2^{\mathfrak{A}}, a_3^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (A, a_1^{\mathfrak{B}}, a_2^{\mathfrak{B}}, a_3^{\mathfrak{B}})$, wobei $a_1^{\mathfrak{A}} := 1$, $a_2^{\mathfrak{A}} := 2$, $a_3^{\mathfrak{A}} := 3$, und $a_1^{\mathfrak{B}} := 5$, $a_2^{\mathfrak{B}} := 1$, $a_3^{\mathfrak{B}} := 6$.

[1] https://moodle.rwth-aachen.de/course/view.php?id=1662

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, indem Sie eine Gewinnstrategie für die Duplikatorin im Spiel $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ angeben.

(b) Sei $\mathfrak{C} := (A, a_1^{\mathfrak{C}}, a_2^{\mathfrak{C}}, a_3^{\mathfrak{C}})$ mit $a_1^{\mathfrak{C}} := 5$, $a_2^{\mathfrak{C}} := 5$, $a_3^{\mathfrak{C}} := 3$. Gilt auch $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{C}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Betrachten Sie nun die Klasse $\mathcal{K}_A$ aller τ-Strukturen über dem fixen Universum A. Die Relation der elementaren Äquivalenz ($\equiv$) ist auf dieser Klasse, entsprechend ihrem Namen, eine Äquivalenzrelation. In wie viele Äquivalenzklassen wird $\mathcal{K}_A$ von $\equiv$ partitioniert? Begründen Sie.

(d)* Sei $\tau_n := \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Wir fixieren wieder ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ und betrachten das feste Universum $A = \{1, 2, ..., m\}$. Wie viele Äquivalenzklassen hat nun allgemein die Äquivalenzrelation $\equiv$ auf der Klasse aller τ_n-Strukturen über dem Universum A in Abhängigkeit von n? Erläutern Sie nur, welche mathematischen Objekte Sie dafür zählen müssen; Sie brauchen keine konkrete Formel für diese Zahl aufzustellen.