

## 9. Übung Mathematische Logik

**Abgabe:** bis Dienstag, den 18.06., um 14:00 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, 1. Stock) oder in der Vorlesung.

**Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.** Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

**Aufgabe 1** 10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im Moodle-Lernraum<sup>1</sup>.

**Aufgabe 2** 4+4 Punkte

(a) Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei  $\Phi$  eine Menge von FO-Formeln über einer relationalen Signatur  $\tau$ ,  $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Phi)$  die durch  $\Phi$  axiomatisierte Klasse von Strukturen, und sei  $\mathcal{B}$  eine  $\tau$ -Struktur. Wenn für jedes  $m \in \mathbb{N}$  ein  $\mathcal{A}_m \in \mathcal{K}$  existiert mit  $\mathcal{B} \equiv_m \mathcal{A}_m$ , dann gilt  $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ .

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes aus (a), dass die Klasse der Graphen, die nur endlich viele Zusammenhangskomponenten haben, nicht FO-axiomatisierbar ist.

**Aufgabe 3** 3+5 Punkte

(a) **Neue Version:** Zeigen Sie, dass innerhalb der Klasse der endlichen Strukturen die Klasse der gerichteten Bäume FO-axiomatisierbar ist: Geben Sie ein Axiomensystem  $\Phi$  an, sodass für jede endliche  $\{E\}$ -Struktur  $\mathfrak{A}$  gilt:  $\mathfrak{A} \models \Phi$ , genau dann wenn  $\mathfrak{A}$  ein gerichteter Baum ist, d.h.  $\mathfrak{A}$  ist zusammenhängend, kreisfrei, und jeder Knoten außer der Wurzel hat genau einen Vorgänger.

(b) Zeigen Sie, dass diese Klasse jedoch nicht endlich axiomatisierbar ist, indem Sie in einem geeigneten Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel eine Gewinnstrategie für die Duplikatorin finden.

**Aufgabe 4** 6 + 4 + (2 + 2) Punkte

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Sequenzkalküls der Prädikatenlogik, dass es keine Menge gibt, die genau die Mengen enthält, die sich nicht selbst enthalten.

*Hinweis:* Nutzen Sie als Signatur  $\tau = \{\in\}$  (d.h. Sie sprechen über Strukturen, deren Elemente Mengen darstellen). Formalisieren Sie damit die gewünschte Aussage als Sequenz und konstruieren Sie eine Ableitung im Sequenzkalkül.

(b) Zeigen Sie, dass man bei den Regeln  $(\exists \Rightarrow)$  und  $(\Rightarrow \forall)$  die Bedingung, dass  $c$  nicht in  $\Gamma, \Delta$  und  $\psi$  vorkommt, nicht weglassen kann.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie semantisch, d.h. nicht unter Anwendung des Sequenzkalküls, die Korrektheit folgender Schlussregeln.

$$(i) \frac{\Gamma, \forall x \varphi(x) \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi(x)}$$

$$(ii) \frac{\Gamma, \exists x \varphi(x) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \Rightarrow \Delta}$$

---

<sup>1</sup><https://moodle.rwth-aachen.de/course/view.php?id=1662>